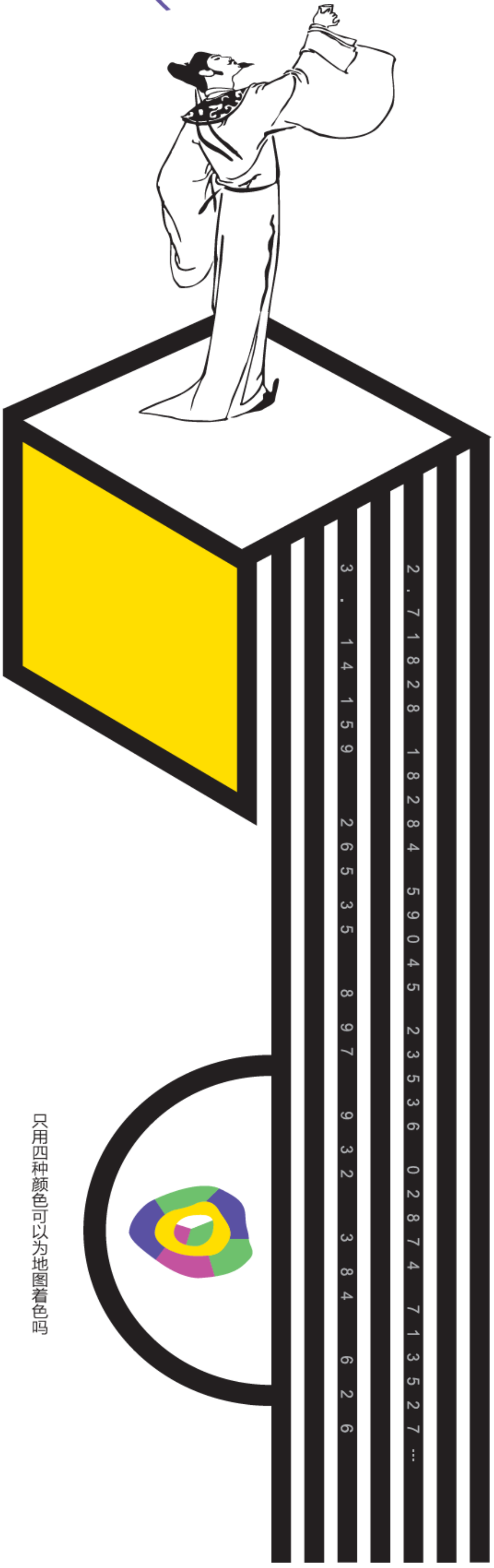
基因遗传

花间一壶酒
独酌无相亲
举杯邀明月
对影成三人

胡兵◎编著

别说你不懂数学



只要给你一张足够大的纸
你就能到达月球

0.618:1
人类研究发现，人体其实是
世界上最美的物体之一

只用四种颜色可以为地图着色吗

清华大学出版社

VISIT…

LANZAROTE Caliente.com

别说你不懂数学

胡兵　编著

清华大学出版社
北　京

内 容 简 介

本书以纪录片式创作手法、图文并茂的形式、生动有趣的文字，从数学如诗、数学之趣、数学之巧、数学之美、数学之音、数学之语、数学之奇七个篇章提供了一条了解数学的小径，介绍了斐波那契数列的神秘意义、毕达哥拉斯的音阶表、复利、图论、线性规划、数独、概率应用、密码、拓扑、分形图、混沌理论等伟大的数学思想和系统。从中不仅可以了解到诸多数学趣味知识，而且还可学到不少诗歌、音乐、绘画、建筑、设计、经济、管理等方面的知识。

这是一本趣味性的“数学入门”科普书，书中避开了深奥难懂的概念和推导过程，力求从日常生活或历史典故中引出数学知识，通过深入浅出的阐述，培养读者对数学的兴趣。

本书封面贴有清华大学出版社防伪标签，无标签者不得销售。

版权所有，侵权必究。侵权举报电话：010-62782989 13701121933

图书在版编目(CIP)数据

别说你不懂数学 / 胡兵编著. — 北京：清华大学出版社，2018
ISBN 978-7-302-49613-7

Ⅰ. ①别… Ⅱ. ①胡… Ⅲ. ①数学—普及读物 Ⅳ. ① O1-49

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2018）第 028838 号

责任编辑：吴 雷
封面设计：李召霞
版式设计：方加青
责任校对：王荣静
责任印制：

出版发行：清华大学出版社
网 址：http://www.tup.com.cn，http://www.wqbook.com
地 址：北京清华大学学研大厦 A 座 邮 编：100084
社 总 机：010-62770175 邮 购：010-62786544
投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质 量 反 馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 装 者：
经 销：全国新华书店
开 本：170mm×240mm **印 张：**11.25 **字 数：**157 千字
版 次：2018 年 2 月第 1 版 **印 次：**2018 年 2 月第 1 次印刷
印 数：1～3000
定 价：39.00 元

产品编号：077027-01

序　言

《国务院关于深化考试招生制度改革的实施意见》于2014年9月4日发布，标志着新一轮考试招生制度改革全面启动。“不分文理科、减少考试科目”等考试科目改革措施将数学推到了高考的最前沿。一时间，媒体大肆宣传数学乃“万科之首”“万科之母”等。

不可否认，数学是一门浩瀚的学科，没有人能够完全掌握它。人类从数数开始逐渐建立了自然数的概念，慢慢地掌握了简单的计算法，并逐渐认识了最基本、最简单的几何形状，最初算术与几何还没有分开。从公元前5世纪到17世纪，大约在两千年的时间里，人类逐渐形成了初等数学（常量数学）的主要分支：算数、几何、代数。变量数学产生于17世纪，大体上经历了两个决定性的重大步骤：第一步是解析几何的产生；第二步是微积分的出现。从19世纪上半叶开始，数学发展进入现代阶段，以代数、几何、分析中的深刻变化为特征。

从20世纪后半叶开始，数学获得了从未有过的广泛应用。自然科学和技术方面自然离不开数学，目前以“机器学习”为特征的第三次人工智能浪潮的数学基础则是“统计学”“信息论”和“控制论”。在政治、经济、管理、销售方面也离不开数学，甚至在文学、建筑、音乐、生活中处处都可发现数学的“影子”。掌握一定程度的数学知识，是今后在世界上生存不可缺少的条件。

但是，对于多数人来说，数学往往仅仅作为应付考试的必要科目，而在毕

业后因嫌其无用就很快全忘了。作为一名在“985”高校的文科学院教授理工课程的老师，我通过多年理工课程的教学，发现很多文科生不是不能学好数学和理工课程，而是对理工课程有抵触情绪，不愿意去学，骨子里认为它很难，既然学不会，索性就不学了。究其根源，是因为他们不了解数学，在成长过程中遇到或听到过许多“谈数色变”的事情，因此对数学有一种天生的恐惧。

然而，数学是多彩的、可爱的、有趣的。大家都知道达•芬奇是一位著名的画家、艺术家，但很少有人知道他还是一名伟大的科学家、数学家。数学是属于所有人的，绝不仅仅属于伽罗瓦和拉马努金那样的天才。

同时，我们还应看到，没有必要要求所有人都具备很高的数学水准。对绝大多数人来讲，会运用数学解决实际问题才是关键。当今世界，人类的生活逐渐地走向集体化和社会化，数学的活跃时代已经到来。

然而，学习数学不应只局限于课堂中。当你在出租车上发现里程表坏了时，你可以用速度和时间来计算距离。甚至玩游戏、解决谜题等都是爱上数学的好方法。**培养发现数学的眼睛和探索习惯，会让你感受到数学在方方面面都影响着你的生活。**这也就是我写这本趣味性“数学入门”书的目的。

学习数学，求快是没有任何好处的。把数学和速度绑在一起只会对我们的学习能力起负面作用。学习数学要有毅力，循序渐进、逐步积累。兴趣是毅力产生的源泉。本书避开深奥难懂的概念和推导过程，采用纪录片式的创作手法，力求从日常生活或历史典故中引出数学知识。为适应“读图时代”年轻人的阅读习惯，本书采用图文并茂的形式，让你在悠闲的享受中细细品味数学之美，在不知不觉中了解那些你所听过数学概念的真正意义。

数学这门学科是几千年来人类智慧的结晶，写这本书的难度不在于如何挑选主题，而在于如何舍弃一些主题；不在于把数学问题写得如何深入透彻，而在于如何将数学写得简单明了。本书从数学如诗、数学之趣、数学之巧、数学之美、数学之音、数学之语、数学之奇七个篇章对数学进行审视。阅读此书，你不需要太多的数学基础，也不必从第一章开始，可以从你最感兴趣的章节开

始，在这些数学思想中尽情游览。

我的研究生毛燕华、李珍、何德俊等同学为本书的撰写查阅了大量的参考书籍和资料，并从文科生的视角对本书的内容编排和难易程度提出了许多宝贵建议。本书的出版还得到了清华大学出版社编辑们的大力支持，他们建议本书定位为一本科普读物，而非一本传统的数学教材。在此，对提供支持的所有人表示深深的感谢！

最后，还要感谢读者——你！如果你阅读完此书，能对数学产生一点兴趣，不再害怕数学，从此慢慢爱上数学，认为自己就是一个“数学人”。这对我将是莫大的欣慰！

胡　兵

2017 年 10 月于广州大学城

目　录

第一章　数学如诗…………………………………………………1

第一节　寓数于诗 ……………………………………………3

一、数字入诗……………………………………………3

二、以数解意……………………………………………6

三、融数字与运算为一体的诗歌 ……………………8

第二节　融诗于数 ……………………………………………10

一、百羊问题……………………………………………11

二、宝塔装灯……………………………………………12

三、李白打酒……………………………………………13

四、百馍百僧……………………………………………13

五、僧侣人数……………………………………………14

第三节　诗情数意 ……………………………………………15

一、诗中蕴含的数学思想……………………………15

二、诗中蕴藏的几何构图……………………………18

第二章　数学之趣…………………………………………………23

第一节　数字游戏 ……………………………………………26

一、迷人的幻方…………………………………………26

二、数独……30
三、天煞魔格……31
第二节　拼图游戏……33
一、七巧板……33
二、十五子棋……34
三、福斯特的遗嘱……37
第三节　概率游戏……42
一、庄家会输吗？……42
二、我们的生日相同吗？……45
三、蓝色眼睛会消失吗？……47

第三章　数学之巧……49

第一节　我们该如何理财……50
一、不积小流无以成江海……50
二、金钱也是“越老越值钱”……55
三、你的生活达到小康水平了吗？……57
第二节　我们如何分配食物……59
一、如何省钱又保证营养……60
二、切蛋糕也有学问……63
第三节　我们如何规划出行……68
一、怎样散步才能不重复地走过每座桥？……68
二、我应该先去哪里，再到哪儿？……69
三、只用四种颜色可以为地图着色吗？……72

第四章　数学之美……77

第一节　美的奥秘——0.618……78

一、“窈窕淑女”与“三庭五眼”……79
二、无处不在的黄金比例……80
三、军事中的0.618……81
第二节 建筑的数学之美……83
一、帕特农神庙与黄金分割……83
二、几何图形在建筑中的运用……85
三、抽象数学与建筑……88
第三节 艺术的数学之美……89
一、绘画与数学……89
二、设计与数学……91
三、雕塑与数学……93
第四节 自然界的数学之美……96
一、“天才设计师”……96
二、“精算师”……97
三、花瓣与数列……98
四、生命的螺旋线……99

第五章 数学之音……103

第一节 音乐与数学的内在联系……104
一、三角函数与音乐……104
二、音程与音阶……106
三、节拍……109
第二节 毕达哥拉斯与音乐的不解之缘……110
一、琴弦定律……110
二、毕达哥拉斯音差常数……114
第三节 斐波那契数列与音乐……116

一、钢琴与斐波那契数列……116
二、斐波那契数列……117
三、斐波那契数列在音乐中的应用……119
四、数字在音乐中的寓意……121

第六章 数学之语……125

第一节 文明的载体……126
一、二进制……126
二、十六进制……129
三、七进制……130
四、十二进制……131
五、二十进制……132
六、六十进制……133
七、定位原理与0的发明……134
第二节 信息的使者……135
一、莫尔斯码……135
二、RSA算法……137
第三节 数学悖论……139
一、三次数学危机……140
二、著名的数学悖论……143

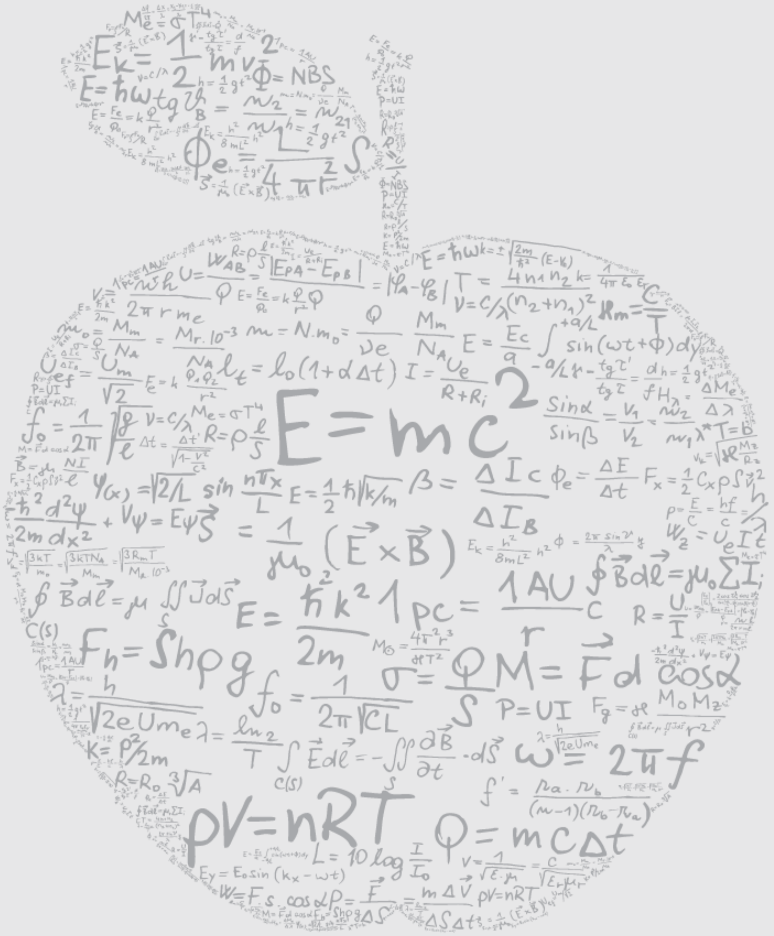
第七章 数学之奇……149

第一节 神奇的克莱因瓶……150
第二节 迷人的自相似图形……154
一、科赫曲线……156
二、康托尔集……156

三、皮亚诺曲线……157
四、谢尔宾斯基衬垫、地毯、海绵……157
五、维数与分维……159
六、分形图是高效率的……161
第三节　美丽的蝴蝶……162

思考题参考答案……166

参考文献……167



第一章

数学如诗

“那些从诗中体验到数学的诗人是好诗人，那些从数学中体会到诗意的人是好数学家。”

——摘自著名作家王蒙的《最高的诗是数学》

“数学到了最后阶段就遇到了想象，在圆锥曲线、对数、概率、微积分中，想象成了计算的系数，于是数学也成了诗。”

——雨果（19 世纪法国浪漫主义作家）

人们常认为，诗歌讲究形象美和含蓄美，以文学的形式表达人的情感；数学则以严谨的理性锤炼人的思维。对数学不感兴趣的人认为数学很枯燥乏味，诗歌与数学是风马牛不相及的两件事。其实数学也存在许多诗情画意，也有很多数学家和诗人把数学与诗歌巧妙地结合起来。

最冷静的科学与最热情的艺术相遇可从三个层次上进行认识和理解：第一个层次是“寓数于诗”，中国是诗歌的国度，以数入诗，俯拾皆是，诗歌与数学相互渗透；第二个层次是“融诗于数”，直接为数学而写的诗歌，用诗表达算法或日常生活中的数学问题；第三个层次是“诗情数意”，体会诗歌中的数学思想、数学意境，诗中有没有数字并不重要。

第一节 寓数于诗

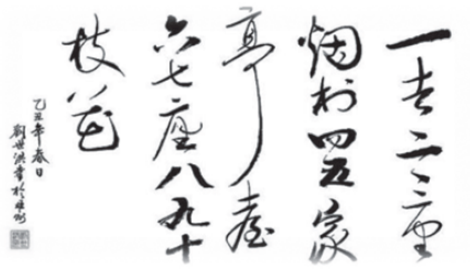
一、数字入诗

无论是唐诗，还是历代诗歌，数字入诗随处可见。例如，“一片冰心在玉壶”“二十四桥明月夜”“三千宠爱在一身”“四时可爱唯春日”“五岳寻仙不辞远”“六朝如梦鸟空啼”“七月七日长生殿”“八千里路云和月”“九曲黄河万里沙”“十年辛苦不寻常”“百年世事不胜悲”“千呼万唤始出来”“万里归心对明月”，等等。

又如，唐代诗人张祜的“故国三千里，深宫二十年”，朱熹的“等闲识得东风面，万紫千红总是春”，杜甫的“竹批双耳峻，风入四蹄轻”，程颢的“隔断红尘三十里，白云红叶两悠悠”，杜牧的“南朝四百八十寺，多少楼台烟雨中”，王之涣的“欲穷千里目，更上一层楼”，李白的“尔来四万八千岁，不与秦塞通人烟”“飞流直下三千尺，疑是银河落九天”。这些脍炙人口的佳句，生动深刻，诗意天成，经世相传，给后人留下了无穷的享受。

北宋理学家邵雍（1011—1077，字尧夫，谥号康节）有一首耳熟能详的诗——《山村》。

一去二三里，
烟村四五家，
亭台六七座，
八九十枝花。



这首诗歌巧妙地用一二三四五六七八九十这十个数字连在一起描绘出乡村景色，是儿童学习计数的启蒙诗，也是最早的数学方面的科普诗歌。

清末年间，鸦片盛行，官署上下，大小衙门，几乎变成了烟馆。有人仿邵雍写了下面这首启蒙诗以讽刺。

一进二三堂，
床铺四五张，
烟灯六七盏，
八九十支枪。

这首诗意境虽大不如前，却也入木三分，把鸦片泛滥的情景写得真真切切！

“扬州八怪”之一的郑板桥（1693—1765，郑燮，字克柔）有一首题名为《咏雪》的诗。

一片二片三四片，
五片六片七八片，
九片十片无数片，
飞入芦花皆不见。

关于此诗，有很多不同的版本，虽诗的内容有所不同，但都大同小异。此诗用“一到十乃至无数”，真切地描绘出雪花飘飞的情景。而末尾一句，画龙点睛，令人神往。

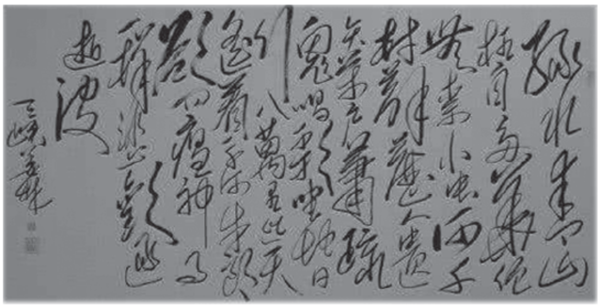
郑板桥还有一首题名为《咏竹》的诗：**“一二三枝竹竿，四五六片竹叶；自然淡淡疏疏，何必重重叠叠。”**数字的魅力尽在其中。

又有，明代作家、《西游记》的作者吴承恩（1500—1582）有一首咏夜景的诗：

十里长亭无客走，
九重天上现星辰。
八河船只皆收港，
七千州县尽关门。
六宫五府回官宅，
四海三江罢钓纶。
两座楼头钟鼓响，
一轮明月满乾坤。

此乃作者在《西游记》第三十六回中的诗。诗中数字从大到小，把夜色写得静美无比。作者让数字披上文学的外衣，诗化了的形象显出别致的情趣。

大家都知道毛泽东主席的诗句“坐地日行八万里，巡天遥看一千河”，意思是“坐在地球上一昼夜便可走八万华里，在宇宙中穿来穿去可遥看许多条银河”。因地球周



长四万公里，1 公里 =2 华里，地球一天自转一周，人随地球自转一天便可日行八万华里，体现出了一代伟人意气风发的革命豪情。

二、以数解意

相传，郑板桥在山东任知县时，偶见一破旧的大门上贴了一副春联，上联：**“二三四五”**，下联**“六七八九”**，横批：**“南北”**。郑板桥随即派人给这户人家送去衣服、食品等。众吏问何故，郑板桥笑答：上联缺“一”即缺“衣”；下联少“十”即少“食”；横批“南北”即是“没东西”呀。数字的妙用何其有趣！

又传，司马相如告别妻子卓文君，离开成都去长安求取功名，时隔五年，不写家书，心有休妻之念。后来，他写了一封难为卓文君的信，送往成都。卓文君接到信后，拆开一看，只见写着**“一二三四五六七八九十百千万万千百十九八七六五四三二一”**。

卓文君一看，数字之中唯独没有“亿”，她顿时明白了司马相如已“无意”于她。她立即用司马相如给她的“数字”信回写了一首如诉如泣的抒情诗：

一别之后，二地相悬，只说是三四月，又谁知五六年，七弦琴无心抚弹，八行书无信可传，九连环从中折断，十里长亭我眼望穿，百思想，千系念，万般无奈叫丫鬟。

万语千言把郎怨，百无聊赖，十依阑干，九九重阳看孤雁，八月中秋月圆人不圆，七月半烧香点烛祭祖问苍天，六月伏天人人摇扇我心寒，五月石榴如火偏遇阵阵冷雨浇花端，四月枇杷未黄我梳妆懒，三月

桃花又被风吹散！郎呀郎，巴不得二一世你为女来我为男。

司马相如读后深受感动，亲自回四川把卓文君接到长安。从此，他一心做学问，终于成为一代文豪。

诗仙李白曾写过一首《月下独酌》的诗：

花间一壶酒，
独酌无相亲。
举杯邀明月，
对影成三人。

在鲜花丛中置一壶酒，自斟独饮，没有亲朋好友相陪。我只有举起杯来邀请天上的明月。结果“明月、我和影子”也就成了三个人在饮酒了。通过数字“三人”，我们立刻会想到月仙和影子立刻变成了活生生的人，在同李白饮酒作乐。此法是神来之笔，独饮的寂寞顿时烟消云散，花间也立刻变得热闹起来。

再有，柳宗元的《江雪》：

千山鸟飞绝，万径人踪灭。
孤舟蓑笠翁，独钓寒江雪。

诗中用一个“千山”和一个“万径”，两个极大的数字凸显环境的静怡和空洞。接下来又用了两个极小的数字“孤舟”和“独钓”，烘托诗人的寂寞。数字用在这里，让整首诗更显寂寥之感，使蓑笠翁在寒江雪中成为千古绝唱。

三、融数字与运算为一体的诗歌

在我国浩如烟海的诗词中，一些融数字与运算为一体的数字诗，更是趣味横生。如下面这首诗：

五百罗汉渡江，岸畔波心千佛子。
一个美人映月，人间天上两婵娟。

此诗传说为苏轼的妹妹苏小妹所作。不仅遣词造句巧，而且还有数学运算在内：上联“千”是“五百”的两倍，下联“两”也是“一个”的两倍。特别是“人间天上两婵娟”一句，想象奇特，堪称传世绝句。

下面这联也有异曲同工之妙：

北斗七星，水底连天十四点。
南楼孤雁，月中带影一双飞。

此联勾出一幅月夜星雁图，其中数字揉进了乘法运算。上联“十四”是“七”的两倍，下联“一双”是“孤”的两倍。

相传清朝时期，纪晓岚为庆贺乾隆皇帝五十岁所作的寿联，也以巧嵌数字见功夫：

二万里山河，伊古以来，未闻一朝一统二万里；
五十年圣寿，自今以往，尚有九千九百五十年。

此联的下联中，“五十年”加上“九千九百五十年”，即为万年，寓万寿之意，且上下联首尾分别重复，实乃巧思佳联。

又传，清乾隆五十年，朝廷为了表示国泰民安，把全国65岁以上的老人请到京城，为他们举行一次盛大宴会。在宴会上，乾隆看见一位老寿星，年高141岁，非常高兴，就以这位寿星的岁数为题，说出上联，并要纪晓岚对出下联。

乾隆帝的上联是：花甲重开，又加三七岁月。

纪晓岚的下联是：古稀双庆，更多一度春秋。

上、下两联都是一道多步计算应用题，答案都是141岁。上联的“花甲”是指60岁，“重开”就是两个60岁，“三七”是21岁，加起来是：$60\times2+7\times3=141$（岁）。下联的“古稀”是指70岁，“双庆”就是两个70岁，多“一度春秋”就是多1岁，同样是：$70\times2+1=141$（岁）。

再如，相传明代才子伦文叙（1466—1513，字伯畴，号迂冈）曾为苏东坡的《百鸟归巢图》配诗：

天生一只又一只，三四五六七八只。

凤凰何少尔何多，啄尽人间千万石。

诗是为《百鸟归巢图》所作，可诗中却不见“百”字的踪影。且看，第一句“归来一只又一只”，一只加一只就是两只；第二句“三四五六七八只”的意思不在表面，而是暗指三四十二，五六三十，七八五十六。总共是：

$$1+1+3\times4+5\times6+7\times8=100$$

数字的奥妙就在于此。诗人似在漫不经心地数数，突然笔锋一转，借题发挥，感叹官场之中廉洁奉公的“凤凰”太少，贪污腐化的“害鸟”太多，他们巧取豪夺，把老百姓赖以活命的粮食侵吞“啄尽”了。真是让人拍手叫绝。这是巧合，还是诗人有意为之？诗人意在借题发挥，揭露封建社会之黑暗、腐败。

通过以上的例子，相信大家都能感受到诗歌与数学结合所产生的另一种美感了。在感受美的同时，把对诗歌的学习兴趣迁移到数学学习中，才能深刻体会到诗歌中蕴含的数学知识。

第二节　融诗于数

歌剧《刘三姐》中，刘三姐与三位秀才（陶、李、罗）对唱：

罗秀才：“小小麻雀莫逞能，三百条狗四下分。一少三多要单数，看你怎样分得清。”

刘三姐：“九十九条打猎去，九十九条看羊来。九十九条守门口，还剩三条奇奴才。”

计算一下可以发现：300 = 99+99+99+3 。这正是数学中的整数分拆

问题。

在元代有一部算经《详明算法》内有关于丈量田亩的方法：

古者量田较润长，全凭绳尺以牵量。
一形虽有一般法，惟有方田法易详。
若见涡斜并凹曲，直须裨补取为方。
却将黍实为田积，二四除之亩法强。

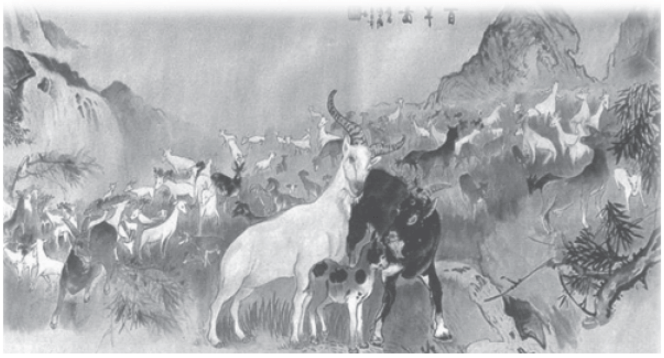
这首诗的作者为元末的贾亨。诗的意思是，田亩丈量以“方田法”即以矩形面积为基础，如遇不规则图形，用割和补的方法巧妙化解，体现了处理几何问题时“出入相补”的一般化原理。

中国古代典籍中的许多数学问题，都以诗歌形式提出。

一、百羊问题

明代大数学家程大位著的《算法统宗》一书，有一道诗歌形式的数学应用题，叫“百羊问题”。

甲赶羊群逐草茂，
乙拽一羊随其后，
戏问甲及一百否？
甲云所说无差谬，
所得这般一群凑，
再添半群小半群，
得你一只来方凑，
玄机奥妙谁猜透？



意思是：一个牧羊人赶着一群羊去寻找青草茂盛的地方。有一个牵着一只羊的人从后面跟来，并问牧羊人："你的这群羊有100只吗？"牧羊人说："如果我再有这样一群羊，加上这群羊的一半又1/4群，连同你这一只羊，就刚好满100只了。"

如何用巧妙的算术方法求出这群羊有多少只呢？

我们可以把这群羊作为一个整体，用"1"代替，因此，此题的解为：

（100−1）÷（1+1+1/2+1/4）=36（只）

注意：上式"（100−1）"中的"1"代表问话人手中的那只羊，而"（1+1+1/2+1/4）"中的"1"则代表牧羊人所赶的一群羊。

二、宝塔装灯

这是明代数学家吴敬偏著的《九章算法比类大全》中的一道题，题目是

远望巍巍塔七层，
红光点点倍加增，
共灯三百八十一，
请问顶层几盏灯？

同样地，我们可以把塔顶层的灯数看成"1"，则向下各层的灯数分别为顶层灯数的2倍、4倍、8倍，往下类推，可解出各层倍数和为

1＋2＋4＋8＋16＋32＋64=127

所以顶层的盏数为

381÷127=3（盏）

三、李白打酒

李白街上走，提壶去打酒；
遇店加一倍，见花喝一斗；
三遇店和花，喝光壶中酒。
试问酒壶中，原有多少酒？

这是一道民间算题。题意为：李白在街上走，提着酒壶边喝边打酒，每次遇到酒店将壶中酒加一倍，每次遇到花就喝去一斗①，这样遇店见花各 3 次，把酒喝完。问壶中原来有酒多少斗？

此题用方程解非常容易，设壶中原来有酒 X 斗，**“遇店加一倍”**就是 $2X$，**“见花喝一斗”**就要减去“1”，此时酒壶中还有酒（$2X-1$）斗，以此类推，则可列出以下方程：

$$[(2X-1)\times 2-1]\times 2-1=0$$

解得 $X=7/8$，即壶中原来有酒 7/8 斗。

四、百馍百僧

明代大数学家程大位著的《算法统宗》中还有这样一题：

一百馒头一百僧，大僧三个更无增，
小僧三人分一个，大小和尚各几丁？

① 斗：古代容量单位，1 斗 =10 升。

题意为：有一百个和尚分食一百个馒头，一个大和尚可以吃 3 个馒头，而一个小和尚只能吃 1/3 个馒头，这样正好可以分完，问有多少个大和尚和多少个小和尚？

这题可用假设法求解，如假设大和尚有 100 个，则缺馒头（3×100−100）= 200 个，一个小和尚比一个大和尚少吃（3−1/3）个馒头，需要多少个小和尚才能弥补所缺的 200 个馒头呢？因此我们可以通过下式算出小和尚的人数为 75 人：

$$(3\times100-100)\div(3-1/3)=75\text{（人）}$$

那么，大和尚的人数就很容易知道为：100−75=25（人）。

这与“百元买百鸡”问题的算法是一致的。

五、僧侣人数

在《增删算法统综》里，也有这样一首古诗，就是一道完整的数学题。

巍巍古寺在山林，
不知寺内几多僧。
三百六十四只碗，
看看用尽不差争。
三人共食一碗饭，
四人共吃一碗羹。

“请问先生明算者，算来寺内几多僧。”对于这道并不复杂的数学题，我们可以这样思考：吃饭的碗的个数应该与总的人数的三分之一相等，盛菜的碗的个数应该与总的人数的四分之一相等，因此，总人数为：364÷(1/3+1/4) = 624（人）。

汉代数学家刘徽所著的《九章算术》是一部世界性著作，突出的成就有：分数运算、比例问题、双设法、面积及体积计算、一次方程解法、负数的引入及运算法则、开平方、开立方及一般二次方程的解法等。在现在的小学教育中部分涉及鸡兔同笼问题、方程、勾股、均输、盈不足等。了解这些，教师在教学中可以帮助孩子博古通今，激发其学习数学的兴趣。

“竹原高一丈，末折着地，去本三尺，竹还高几何？”意思是说：一根竹子有一丈长，从中间折断使末端着地，此时末端距离竹子根部有三尺，请问竹子还有多高？

第三节 诗情数意

数学与诗歌的内在联系，在于意境。两者有着千丝万缕、相通相融的关系，从诗词中可学习数学知识，通过数学知识也可了解诗词的魅力。让我们步入诗歌之林，去体会诗歌的数学意境吧。

一、诗中蕴含的数学思想

➢ “变中不变”思想

数学中有一个“不变量”分支，专门研究数学中各种不变量的性质及其应用。诗人也常常利用变化中的不变量来增强诗的感染力。例如，刘禹锡《西塞

山怀古》中的名句：**“人世几回伤往事，山形依旧枕寒流。”**就十分成功地运用了变与不变的对比：三国鼎立的消亡，宋齐梁陈的更替，人世间发生了多少兴亡变化，但是险要的西塞山却没有变，仍然枕靠长江，迎风破浪，一如既往。他的另一首七绝《乌衣巷》诗云：

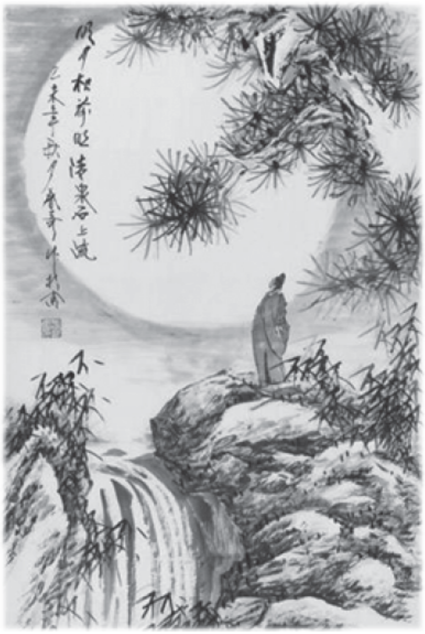
朱雀桥边野草花，
乌衣巷口夕阳斜。
旧时王谢堂前燕，
飞入寻常百姓家。

也是一首以变与不变的强烈对比而脍炙人口的作品。人事变迁，江山易主，旧时的王公贵族已经烟消云散，他们的朱门豪宅已变成寻常百姓的家院，可是燕子并不管这些，它们仍旧飞回原来栖息的地方筑巢。

另外，这种“变中不变”的思想与文学中的“对仗”也有相似之处。“对仗”是上联与下联词句的某些特性（字数、词性等）保持不变。

唐朝王维的两句诗：

明月松间照，清泉石上流。



诗的上句“变化”到下句，内容从描写月亮到描写泉水，确实有变化。但是，这一变化中有许多是对应不变的：

明——清（都是形容词）

月——泉（都是名词）

松——石（都是名词）

间——上（都是介词）

照——流（都是动词）

明月——清泉（都是自然景物）

在文学和数学中都广泛存在“变化中的不变”性质。

➢ “转化与化归”思想

数学上的“转化与化归”思想，就是在研究和解决有关数学问题时，采用某种手段将问题通过变换使之转化，进而使问题得到解决的一种数学方法。而在文学描述上，当某种感觉无法直接言明，就转化成另一种人们在日常生活中可看可感的具体事物来述说。李白将这种表述方法演绎到了极致，正如其在《行路难》中有这样的诗句：

金樽清酒斗十千，
玉盘珍馐值万钱。
停杯投箸不能食，
拔剑四顾心茫然。

金杯中的美酒一斗价十千，玉盘里的菜肴珍贵值万钱。但心情愁烦使得我放下杯筷，不愿进餐。拔出宝剑环顾四周，心里一片茫然。这些“清酒”与“珍馐”都是有价的，都是可以具体感知的。在这种时候李白充分运用了他超然的智慧，把无形的情感转化到具体可感的事物上。

➢ “周期运动”思想

白居易的《赋得古草原送别》诗云：

离离原上草，一岁一枯荣。
野火烧不尽，春风吹又生。

这首诗是作者少年时代的作品，也是当时传诵的名篇。诗中通过对荒原野草的赞颂，反映了作者积极进取的精神。如果我们用数学的眼光去欣赏诗意的精美，会发现诗中描绘了一种“周期运动”。“一岁一枯荣”是指野草秋枯春荣，岁岁循环，生生不息，这与函数的周期性数学意境完全吻合。

二、诗中蕴藏的几何构图

➤ 诗与几何四要素

人人都会背杜甫的《绝句四首》（之一）：

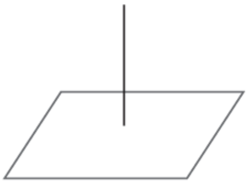
两个黄鹂鸣翠柳，一行白鹭上青天。
窗含西岭千秋雪，门泊东吴万里船。

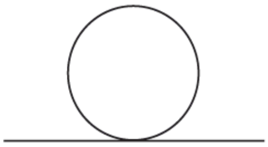
这首诗不仅对仗，而且非常工整。景物的描写由近及远，由小到大，是一幅优美的水墨画。如果从数学的角度来看，这首诗还构造了一个含有“点、线、面、体”四个几何基本要素的空间图形。第一句“两个黄鹂鸣翠柳”，描写的是两个“点”；第二句“一行白鹭上青天”，描写的是一条“线”；第三句“窗含西岭千秋雪”，描写的是一个“面”；第四句“门泊东吴万里船”，描写的是一个“空间体”。此处表现的时空之幽远，凭借数字深化了时空意境，与平面的无限延伸有异曲同工之妙，营造出了一种难以言表的美妙意境。

➢ “诗情画意”与“几何图形”

唐代大诗人王维的诗素有“诗中有画”的美誉，他的《使至塞上》：

单车欲问边，属国过居延。
征蓬出汉塞，归雁入胡天。
大漠孤烟直，长河落日圆。
萧关逢候骑，都护在燕然。





这是王维奉命赴边疆慰问将士途中所作的一首纪行诗，记述了出使塞上的旅程以及旅程中所见的塞外风光。颈联两句“大漠孤烟直，长河落日圆”描绘了边陲大漠中壮阔雄奇的景象，境界阔大，气象雄浑。然而，数学家读此句想到的是：“将那荒无人烟的戈壁视为一个平面，再将那从地面升起直上云霄的烟气柱（实际上是龙卷风卷起的沙尘），看成一条垂直于平面的直线。如果再将“远处横卧的长河视为一条直线，那临近河面逐渐下沉的一轮落日视为一个圆”，那么，“长河落日圆”在数学家的眼中便是一个圆切于一条直线了。上面几张图分别是从诗人和数学家眼中看到的图景，一个充满诗意，一个极具抽象。这是诗人与数学家心灵的相通，是诗情与抽象的巧妙结合。

➢ 诗中的几何透视

李白的《送孟浩然之广陵》：

故人西辞黄鹤楼，
烟花三月下扬州。
孤帆远影碧空尽，
唯见长江天际流。

在柳如烟，花似锦的三月时节，黄鹤楼下，李白送别将要远行扬州的好友孟浩然，一片孤帆，伴随友人飘向水天相连的远方，直至帆影消失在碧空尽头。诗人将深厚的感情寓于动人的景物描绘之中。这时，在我们脑海里浮现出一幅“一叶孤舟随着江流远去，帆影在逐渐缩小，最终消失在水天一际之中”的图景，几何构图中的“透视”也就融合在这美的诗意中了。

➢ 诗中的四维时空

初唐诗人陈子昂的《登幽州台歌》：

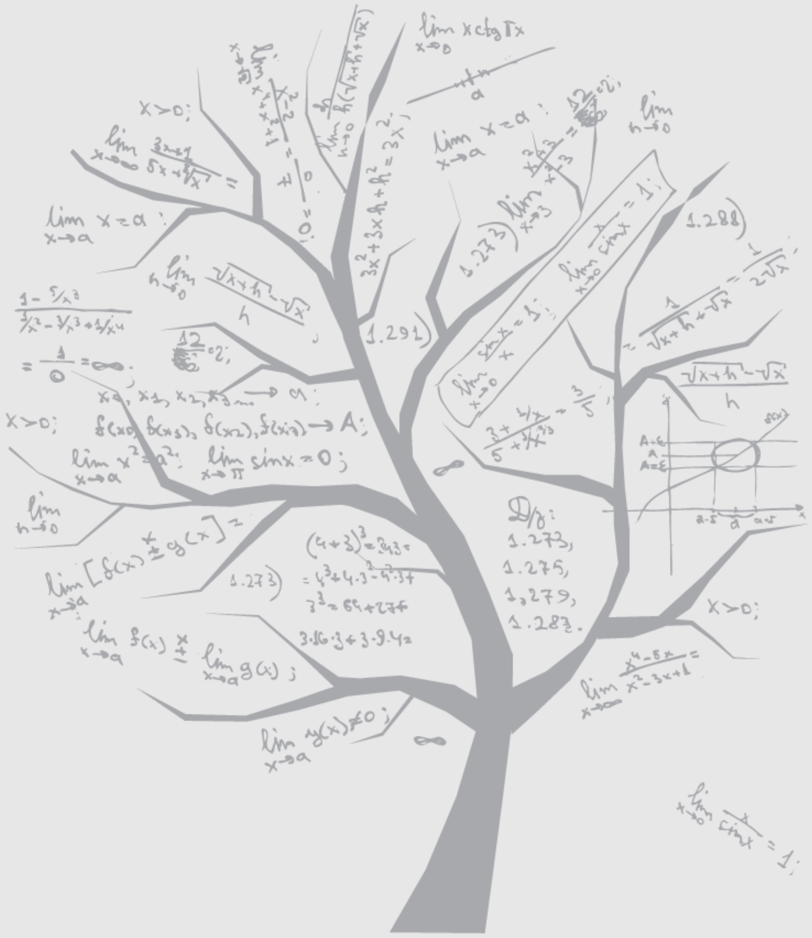
前不见古人，后不见来者，
念天地之悠悠，独怆然而涕下。

这首短诗，深刻地表现了诗人怀才不遇、寂寞无聊的情绪。感叹天地之宏大，时间之遥远，觉人生之短暂，视野之狭隘。这是古人对时间和空间看法的文学表述。

然而，从数学角度来看，这又是一首抒

发时间和空间感知的佳句。诗人以自己为原点，“前不见古人”指时间可以延伸到负无穷大，“后不见来者”则意味着未来的时间是正无穷大，后两句则从天、地层面描写三维的现实空间。全诗将时间和空间放在一起思考，感到自然之伟大，从而产生敬畏之心，以致怆然涕下。

这是时间和三维欧几里得空间的文学描述，此诗的意境正与爱因斯坦的四维时空学说相衔接。数学正是把这种人生感受精确化、形式化。



第二章

数学之趣

现在人们一提到“游戏”，首先想到的是电脑游戏。其实，游戏本身是文娱活动的一种，它分为智力游戏和活动性游戏，前者是发展智力的，后者是发展体力的。

数学游戏既是数学问题又是一种游戏，同时具备知识性、趣味性和娱乐性。我们首先来看下面一个小游戏。

茶杯谜题

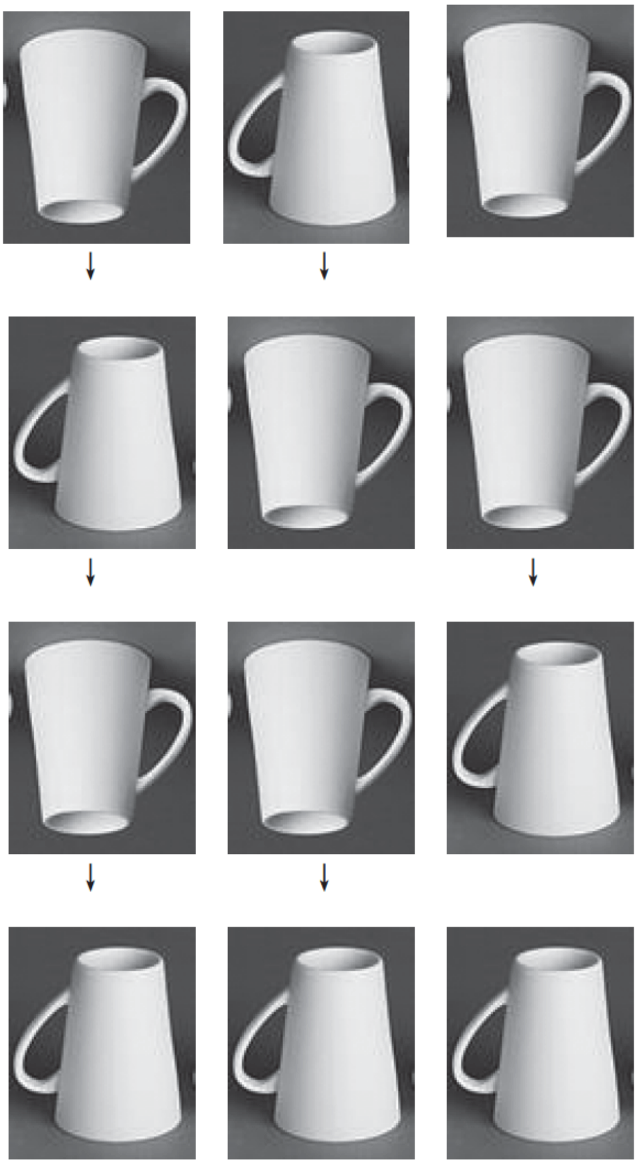
有一种由来已久的酒吧赚钱的方法，需要三个茶杯和一个“傻瓜”（一个在酒吧喝得有点高，容易轻信他人的人）。

“行骗者”将三个茶杯（或玻璃杯）正放在吧台上。

他将中间的那只茶杯倒过来，如下图所示：

然后他解释说，现在他只挪动 3 次就能把三个杯子都倒过来放，其中每次挪动恰好颠倒两个杯子。它们不必相邻，任何两只都可以。（当然，一次挪动就可以完成这件事——把两边的杯子倒过来就可以，但规定使用三步就是这种误导的一部分。）

这 3 次的挪动过程分别是：



“行骗者”开始戏弄那个“傻瓜”。他漫不经心地将中间的茶杯正过来，得到如下情形：

并请“傻瓜”重复这个游戏，小赌一把以增加趣味性。

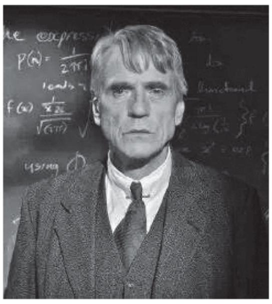
奇怪的是，无论“傻瓜”怎么挪动，杯子都不听话。“傻瓜”没有注意到，初始的位置已被“行骗者”偷偷地改变了。即使他注意到了这一改变，可能也没意识到这一改变带来的灾难性后果。这组正放着的茶杯的奇偶性（奇 / 偶）已经从偶数变成了奇数。由于每次挪动恰好颠倒两个杯子，所以每次挪动都保留这个奇偶性。初始正放着的茶杯为偶数的仍然是偶数，奇数的仍然是奇数。在第一次，起始位置的奇偶性是偶数，最终要求的位置也是如此；而在第二次，起始位置的奇偶数是奇数，这使得我们无法到达要求的最终位置——不仅挪动三次做不到，而且无论挪动多少次都做不到。

这个问题可以推广，与酒吧的场景略微有些区别。由此产生的谜题用的是同样的原理，但是更简洁。

假设从 11 个茶杯开始，全部倒放。规则是必须进行一系列挪动。每次挪动恰好颠倒 4 个杯子，它们不一定要相邻。目标是让这 11 个杯子都正放。你能做到吗？如果能，完成这个任务最少需挪动多少次？

第一节　数字游戏

一、迷人的幻方



哈代曾经写道：“数学家就像是画师或诗人，他们的职责就是制造模式。”即使以数学的标准来评判，仍可以说幻方具有非常有趣的模式。它们介于高度符号化的数学

和谜题爱好者们所钟爱的迷人模式之间。

幻方是一个方形的表格，其中每一格中写入了各不相同的整数，从而使得每一行、每一列以及对角线上的数字之和相等。

从技术角度来讲，仅包含 1 行 1 列的方格也是幻方，但是一般来说，我们都会将其忽略。包含 2 行 2 列的方格不可能是幻方。如果存在这样的幻方，我们可以得到图中所示的形式。由于每行和每列的数字之和都相等，因此有 $a+b=a+c$，这就意味着 $b=c$，与表格中的所有数字各不相同相矛盾。

a	b
c	d

标准的幻方其实是 3×3 的方格，也就是说，方格中填写的数字是 1，2，3，4，5，6，7，8 以及 9。

对于这样一个小方格，可以通过“试验法”构建出一个 3×3 的幻方，但是我们还是先进行一些推导，以帮助我们更快地将它构建出来。如果我们将方格中的所有数字相加，将得到

$$1+2+3+4+5+6+7+8+9=45$$

这个总和等于方格中每一行数字之和的总和，也就是说，每一行（以及每一列、每条对角线）上的数字之和必须等于 15。现在我们来看一下最中间的格子——不妨称为 c。中间 1 行和中间 1 列，以及两条对角线都包含 c。如果我们将这 4 条线上的数字相加，将得到 15+15+15+15=60，而这个数必须等于所有数字之和再加 3 倍的 c。根据等式 $3c+45=60$ 可得知，c 必然等于 5。

4	9	2
3	5	7
8	1	6

九宫格，起源于河图洛书，河图与洛书是中国古代流传下来的两幅神秘图案，历来被认为是河洛文化的滥觞，中华文明的源头，被誉为“宇宙魔方”。河图上，排列成数阵的黑点和白点，蕴藏着无穷的奥秘；洛书上的图案正好对应着 1—9 九个数字，并且无论是纵向、横向、斜向，三条线上的三个数字其和皆等于 15，当时人们并不知道，这就是现代数

学中的三阶幻方，人们把这个神秘的数字排列称为九宫图。九宫图被认为是中国古人数学思维的结晶，是中国古代文明的重要里程碑。

在《射雕英雄传》中黄蓉曾破解九宫格，口诀：戴九履一，左三右七，二四有肩，八六为足，五居中央。

标准的幻方也称为三阶幻方。如果用九个同样的三阶幻方拼接成 9×9 的正方形方格，共有 81 个方格。每一个三阶幻方在这里就是小九宫格，每个小九宫格之间用粗线分开，根据位置依次编号，取 1—9 的 9 个数字为一组共 9 组数字，填满 81 个方格，使其满足 3 个条件：

（1）每一行都是 1—9 的不同数字，没有重复数字；

（2）每一列都是 1—9 的不同数字，没有重复数字；

（3）每一个小九宫格都是 1—9 的不同数字，没有重复数字。

满足这三个条件，就是九阶数字幻方（如右图所示）。这是构成九阶数字幻方的充分必要条件。

81 个方格中任何一个方格改动数字，必然引起全盘“洗牌”，重新排列，得到新的数字幻方，“牵一发而动全身”。那么，究竟存在多少不同的九阶数字幻方呢？中国的严德人先生将此作为学术课题进行了研究，并且设计了专用的软件，终于得出了不同九阶数字幻方的数目，竟然有 6.67×10^{21} 之多。

9	8	6	4	2	1	3	5	7
4	2	1	3	5	7	9	8	6
3	5	7	9	8	6	4	2	1
6	4	2	1	3	5	7	9	8
1	3	5	7	9	8	6	4	2
7	9	8	6	4	2	1	3	5
8	6	4	2	1	3	5	7	9
2	1	3	5	7	9	8	6	4
5	7	9	8	6	4	2	1	3

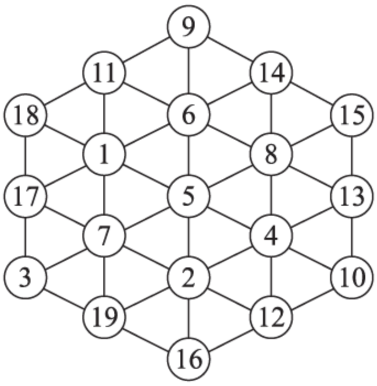
九阶数字幻方

➢ 六角幻方

科学研究就是这样富有联想性，有了正方形幻方以后，数学家们必然会追问：有没有多角形幻方？后来便有人发现了六角幻方。

20 世纪初，美国数学业余爱好者克利福特・亚当斯对幻方着了迷，他

别出心裁地想：既然有正方形幻方，那么能否排出一个六边形的“六角幻方”。他认为只有一层的六角幻方是不存在的，肯定是多层在一起，组成像蜂窝一样的图形。所以他尝试用 1—19 个连续的自然数排出两层真六边形蜂窝形状的阵列，在其中填入 1—19 个数，并使得每条直线（包括 3 个、4 个、5 个数）的数字之和都相等，等于 38（共有 15 组数之和）。



六角幻方

当年，年轻的亚当斯在伦敦以西约 80 公里的一个铁路公司的阅览室当职员，他白天工作，晚上研究六角幻方。为了排列方便，他特别制造了 19 块小纸板，从 1 到 19 进行编号，每天工作之余他就像下棋一样来排列他的幻方。从 1910 年到 1962 年，亚当斯呕心沥血地研究着六角幻方，历经 52 年，他终于得出了答案。最后他将研究成果发表在了《科学美国人》“数字游戏”专栏。

事情本该就此画上了句号，但是追求严谨、富有联想的数学家们并没有止步，他们不停地探究各种各样的幻方，如矩形幻方和平方幻方等。每一个幻方的发现，都是一个动人的故事。

➢ 平方幻方

1876 年法国数学家艾得渥 • 卢卡斯（Edouard Lucas）提出平方幻方的设想，但是时至今日还没有发现一个 3×3 的平方幻方，尽管有一个平方幻方已经非常接近了，如右图所示。这个方格的所有行、列及其中一条对角线上的数字之和都等于 21 609，但是另一条对角线上的数字之和却等于 $127^2+113^2+97^2=38\ 307$。

127^2	46^2	58^2
2^2	113^2	94^2
74^2	82^2	97^2

平方幻方

二、数独

数独是源自18世纪瑞士的一种数学游戏。是一种运用纸、笔进行演算的逻辑游戏。玩家需要根据9×9盘面上的已知数字，推理出所有剩余空格的数字，并满足每一行、每一列、每一个粗线宫（3×3）内的数字均含1—9，且不重复。

数独盘面是个九宫，每一宫又分为九个小格。在这81个格中给出一定的已知数字和解题条件，利用逻辑和推理，在其他的空格中填入1—9的数字，使1—9每个数字在每一行、每一列和每一宫中都只出现一次，所以又称“九宫格”，如右图所示。

				9				
			3		6			
6		1				8		4
7	8		4		5		6	2
	1	5				3	9	
2	3		9		1		5	7
9		2				7		3
			1		3			
				6				

数独起源于18世纪初瑞士数学家欧拉等人研究的拉丁方阵（Latin Square）。19世纪80年代，一位美国的退休建筑师格昂斯（Howard Garns）根据这种拉丁方阵发明了一种填数趣味游戏，这就是数独的雏形。20世纪70年代，人们在美国纽约的一本益智杂志 *Math Puzzles and Logic Problems* 上发现了这个游戏，当时它被称为填数字（Number Place），这也是目前公认的数独最早的版本。1984年一位日本学者将其介绍到了日本，发表在一本游戏杂志上，并改名为“Sudoku”，其中“Su”是数字的意思，“doku”是单一的意思。后来高乐德（Wayne Gould）1997年3月到日本东京旅游时，无意中发现了“Sudoku”。他首先在英国的《泰晤士报》上将其发表，很快数独便风靡全英国，之后他又用了6年时间编写了电脑程序，并将这套程序放在网站上。最近爱尔兰都柏林大学的三位科学家用计算机证明了：九阶标准数独至少必须留有17个数字才能有唯一解。

数独游戏现已风靡全世界，该游戏益智健脑、老少皆宜，自进入中国以来，受到了人们的广泛关注和喜爱。现在数独已经举办了国际竞赛，中国开展数独活动比较晚，但是发展速度引人瞩目。

为了提高趣味性和竞技性，人们还创造出了丰富多彩的数独题目，难度也更大。

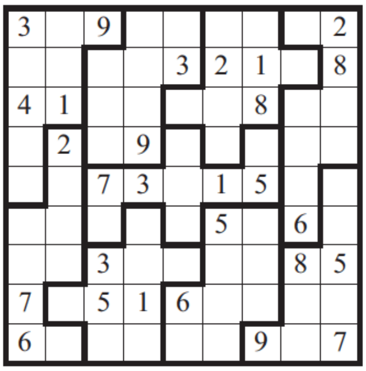
对角线数独（Diagonal Sudoku），在标准数独规则基础上，两条大对角线的数字不重复。

迷你数独（Mini Sudoku），由一个 4×4 或 6×6 网格组成，游戏的目的是将空方格填上数字 1—4 或者 1—6。

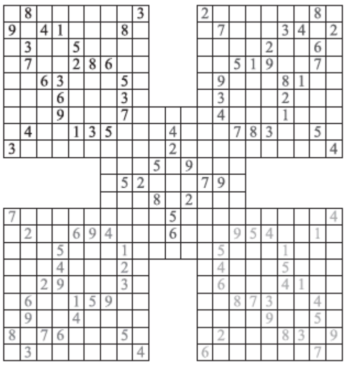
锯齿数独（Jigsaw Sudoku），相对标准数独而言，其“宫”格是不规则的，玩家需在对应的锯齿方框内填入不重复的 9 个数或 N 个数，并保证横纵也不重复。

连体数独（Multi Sudoku）：每个谜题都由两个或者更多的数独网格重叠组成，该网格可能是标准数独谜题也可能是混合类型的数独谜题，这些网格都有一个或多个宫重叠。游戏的目的是通过其规则将每个网格均解出。重叠的区域必须同时满足其所在网格的规则。

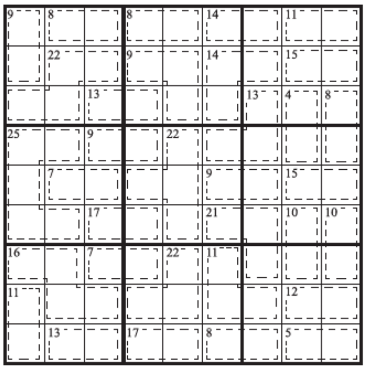
杀手数独（Killer Sudoku），在标准数独规则的基础上，每个虚线框左上角的数字表示虚线框内所有数字之和，每个虚线框内数字无重复。



锯齿数独



连体数独



杀手数独

三、天煞魔格

相传，有一个抽奖贩子，他有一张写满了数字的方格纸，身旁有一个大柜

子，有很多个抽屉，每个抽屉里面有不同数额的金子，只有一个编号为 33 号，名称为“天煞魔格”的抽屉是空的。

抽奖规则是：在写满了数字的方格纸上，如下图所示，一个人从这些数字中任选一个数圈起来，并把这个数所在的行和列上对应的数打上叉，再从没有被打叉的数中选一个数并圈起来，然后再把它所在的行列上的全部的数都打上叉号……经过反复大约 4 次这样的操作后，将最后的数圈起来。最后再将全部所圈起来的数加起来，就是抽屉号码，可以得到抽屉里相应的金子。

7	4	3	5	6
11	8	7	9	10
4	1	0	2	3
12	9	8	10	11
9	6	5	7	8

前来围观的人都跃跃欲试，张三抢先说了一个数字 8，只见贩子把 8 用红笔圈了起来，然后把 8 横排和竖排的数字全部叉掉。贩子让张三再选一个没有被叉掉的数字，张三又选了 4，按前面的规则，贩子又把 4 所在的横竖两列上的数字叉掉，张三又选一个 10，贩子如法炮制，张三又选了一个 5，贩子又把它横竖排的 3 和 8 叉掉，随后他把最后一个没被叉掉的 6 圈起来，说：“8+4+10+5+6 正好等于 33，33 号抽屉是空的，很遗憾，你没有抽到奖。”

~~7~~	~~4~~	~~3~~	~~5~~	(6)
~~11~~	(8)	~~7~~	~~9~~	~~10~~
(4)	~~1~~	~~0~~	~~2~~	~~3~~
~~12~~	~~9~~	~~8~~	(10)	~~11~~
~~9~~	~~6~~	(5)	~~7~~	~~8~~

怎么会这么巧呢？ 33 号抽屉，恰好是唯一一个没有金子的抽屉。其他的人以为只是张三运气不好，谁知道，接连下来几个人选中的数字最后加起来都是 33。

真的是这样吗？到底为什么总是 33，而 33 号抽屉恰好空无一物？那张方格纸究竟又有什么魔力？这些数与“天煞魔格”有什么关系？你也不妨拿出纸和笔，自己尝试一下，看看最后的结果是不是都是 33。

有人将这些数的顺序调换位置后，结果发现得数是“33”或“34”或“28”。原来，这个数字游戏颠倒位置是不行的，少数或添数也是不行的。

但其实，现象背后还是有规律可循的：每行按从小到大的顺序排列的话，它们都是差为 1 的等差数列。整个表格中 0 所在的那行数字代表了等差数列中哪个大哪个小，0 那一列的数字在每一行的等差数列中是最小的，4 所在的那列是最大的，并且 0 这列的数字之和再加 10 正好等于 33。

根据这个规律，表格也能做成让所得的数字之和为别的数，比如 100。

首先在任意一行上写 0—4 的五个数字，顺序随意。比如写的是“2、0、4、1、3”，用所选定的数字 100 减去 10 得到 90，任意挑选加起来为 90 的 4 个数字，比如说 18，23，31，18，将它们写在 0 的那一列上。在 23 这一行找到 1 那一列所在的位置加 1，写 24；在 2 那列所在的位置加 2，写 25； 3 那列所在的位置加 3，写 26；4 那列所在的位置加 4，写 27。其他每行同样操作，就得出了数字和为 100 的天煞魔格，见右图。

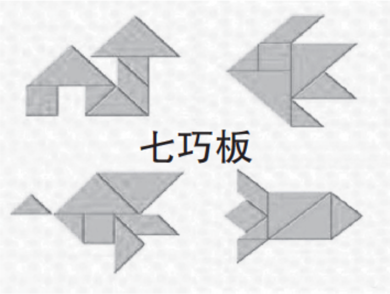
20	18	22	19	21
2	0	4	1	3
25	23	27	24	26
33	31	35	32	34
20	18	22	19	21

若要数字加起来总和为 31 的话，则该如何填数呢？

第二节　拼 图 游 戏

一、七巧板

七巧板又称七巧图、智慧板，是中国民间流传的智力玩具。其历史至少可以追溯到公元前一世纪，宋代时就很盛行，到了明代则基本定型，后流传至欧



美被誉为“唐图”，深受世界各国人民喜爱。

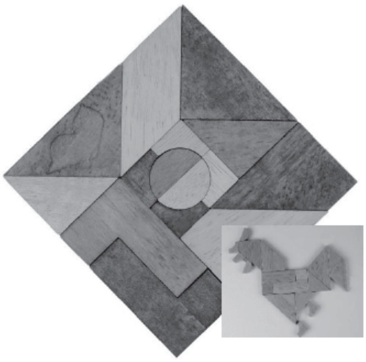
七巧板是由七块板组成的一个完整正方形，其中有五块等腰直角三角形（两块小形三角形、一块中形三角形和两块大形三角形）、一块正方形和一块平行四边形。

这七块板可拼成许多图形约（1 600 种以上），如三角形、平行四边形、不规则多边形等，玩家也可以把它拼成各种人物、植物、动物、桥、房、塔等。通常是在拼成图形以后，把外围轮廓描下来，里面全部涂黑，当看不出拼接的痕迹后，让别人去重新尝试用七巧板拼成这样的图形。

七巧板可一人玩，也可多人进行比赛。利用七巧板可以阐明若干重要几何关系，其原理便是古代算术中的“出入相补原理”。

➤ 益智图

100 多年前，清代童叶庚对七巧板和蝶几图进行研究后，首创用 15 块拼板构成《益智图》玩具，它与七巧板相比，增加了半圆形、拱形、梯形及直角尺形，使拼接的变化更复杂、更有趣。


益智图

益智图游戏规则：在每一个游戏中，指定区域为图形或中文汉字，你必须将全部十五块图板互不重叠地放入指定区域，而且图板组合的外部轮廓必须与指定区域形状一致。你可以任意移动，旋转或翻转每一图板。

二、十五子棋

在一块扁平的木框里，有 15 块可移动木片，分别写着 1—15 的数字。开始时，数的排列如下图左边所示，除了 14、15 两个顺序颠倒以外，其余的数都是按

大小顺序排列好的，空格在右下角。游戏目标是通过移动木片，将 14、15 两个方块按顺序排好，如下图右边所示。与空格相邻的木片可以滑动进空格，空出新的格子。当然，不允许把木片从框中取出。怎样移动可以做到呢？

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

“十五子棋”游戏是美国谜题与智力玩具专家劳埃德于 1878 年在西方“重排十五”游戏基础上改进设计的。与“十五子棋”的玩法类似，中国古代有“好汉排座”游戏，取材于《水浒传》梁山英雄排座次的故事。中国古代类似的游戏还有很多，如“华容道”“牛郎织女”“五子登科”等。

好汉排座

➢ 华容道

“华容道”游戏源于《三国演义》中曹操败走华容道的故事。“华容道”游戏的玩法是通过移动各个棋子，帮助曹操从初始位置移到棋盘最下方中部，从出口逃走。不允许跨越棋子，还要设法用最少的步数把曹操移到出口。

“华容道”是古老的汉族民间益智游戏，以其变化多端、百玩不厌的特点与“魔方”“独立钻石棋”一起被国外智力专家并称为“智力游戏界的三个不可思议”。它与七巧板、九连环等汉族传统益智游戏并称为“中国的难题”。

华容道

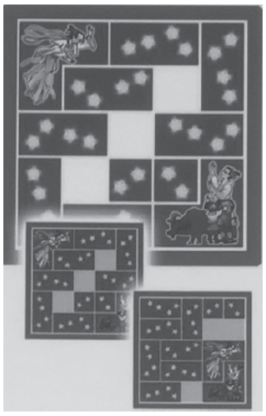
“华容道”游戏又有很多发展，在国内外产生了很多类似的游戏，如推箱子游戏。目前“华容道”游戏中的“横刀立马”布局（关羽立马华容道，一夫当关，万夫莫开，如上图所示）最快走法在中国是 100 步，在日本是 82 步。后来美国人用计算机，使用穷举法找出了最短解法：81 步。

➢ 牛郎织女

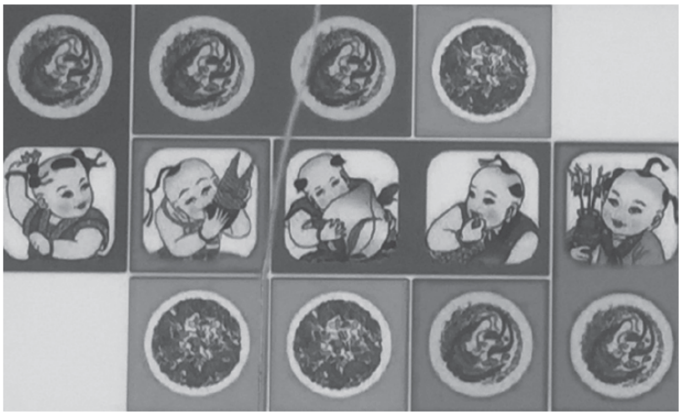
“牛郎织女”是中国最著名的民间传说之一，“牛郎织女”游戏取材于这个故事中鹊桥相会的一段。游戏规则：通过移动滑块的方法使居于两角的“牛郎”和“织女”最终拼到一块，如下面左图。

➢ 五子登科

《宋史 • 窦仪传》记载：宋代窦禹钧的五个儿子仪、俨、侃、偁、僖相继及第，故称“五子登科”。“五子登科”游戏初始时，5 个凤凰图块在中间一行，五个童子则分居右上角和左下角。游戏的目标是让五个童子在中间排成一行，5 个凤凰图块则排在左上角和右下角，如下面右图。



牛郎织女



五子登科

1934 年，在美国诞生了第一例五胞胎兄妹，这成了美国的一件喜事。作为庆祝形式之一，法蒂冈特设计了一款名为“五胞胎排队游戏”的玩具，即为一款与“五子登科”类似的滑块游戏。

三、福斯特的遗嘱

福斯特去世前留下遗嘱，声明把他的财产均分，留给他的 5 个兄弟姐妹 Ann、Dan、Jan、Nan 和 Van。不幸的是，他的兄弟姐妹们相处不好，事实上，他们相互痛恨，以至于让他们任何两个共处一室都是一件很不明智的事情。

在福特斯的公寓里，律师准备公布他的遗嘱。公寓布局如下图所示，律师让 Ann 在厨房，Dan 在餐厅，Jan 在书房，Nan 在卧室，Van 在卫生间进行等待。但 Van 坚持要在厨房，而 Ann 则想去卫生间。律师如何能用最少的移动次数完成安排，并在整个过程中没有任何两个人见面呢？（其他人不需要在原来等待的房间）

餐厅	书房	卧室
厨房	门厅	卫生间

首先，将 5 人用字母代替，画一个表格，他们各自的位置如下图左边所示：

D	J	N
A		V

	?	?
V	?	A

目标该如何移动，可以让 A、V 位置对调。可以选择顺时针或者逆时针。

我们可以用一个 5 元组（D，J，N，A，V）对应这五个人的一种状态：按照顺时针的顺序把数字列出来，忽略空格。这 5 个字母任何一种顺序，都会成为一个排列。其实，要让 Van 和 Ann 位置互换，最少需要 12 步才能完成，

顺序如下图所示：

D	J	N
A		V

第1步

D	J	N
A	V	

第2步

D	J	
A	V	N

第3步

D		J
A	V	N

第4步

D	V	J
A		N

第5步

D	V	J
	A	N

第6步

	V	J
D	A	N

第7步

V		J
D	A	N

第8步

V	J	
D	A	N

第9步

V	J	N
D	A	

第10步

V	J	N
D		A

第11步

V	J	N
	D	A

第12步

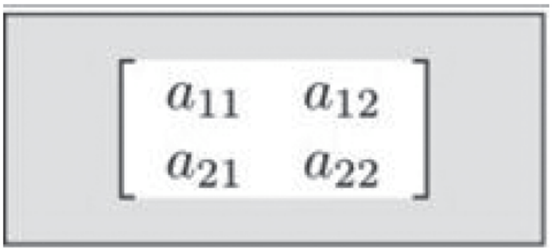
	J	N
V	D	A

最后，Ann在卫生间，Dan在门厅，Jan在书房，Nan在卧室，Van在厨房。

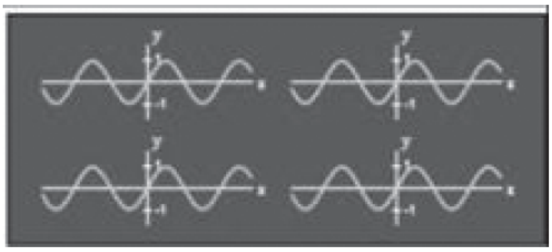
这个问题还有其他解法吗？你也可以拿起纸和笔试一试。

猜电影的数学游戏

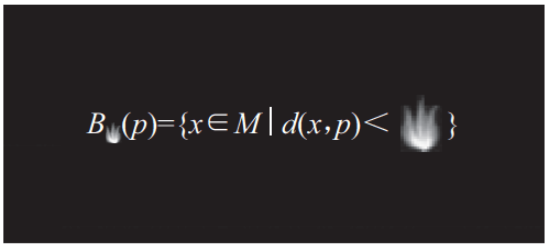
下面这些有趣的图片，每一幅小图都代表了一部被数学语言所诠释的电影，你能猜出这些电影的名字吗？



（1）



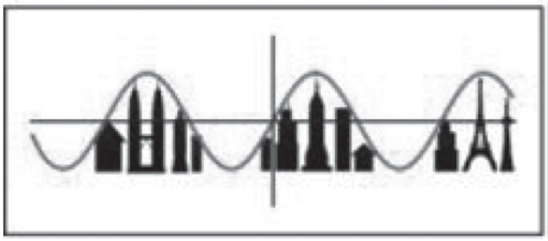
（2）



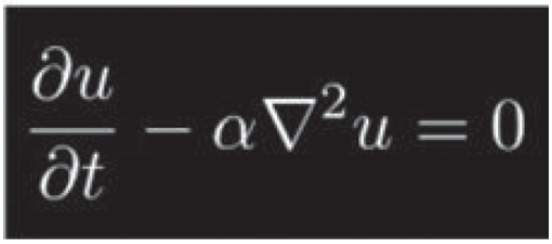
（3）

（4）

（5）



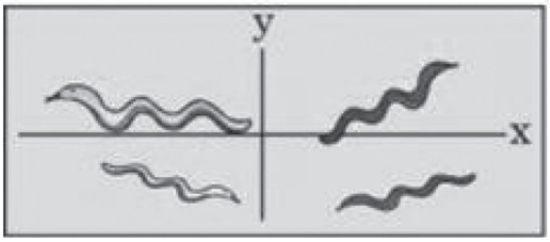
（6）



（7）

（8）

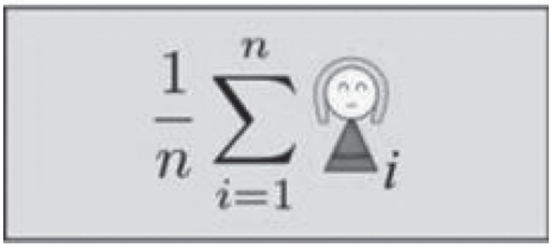
（9）



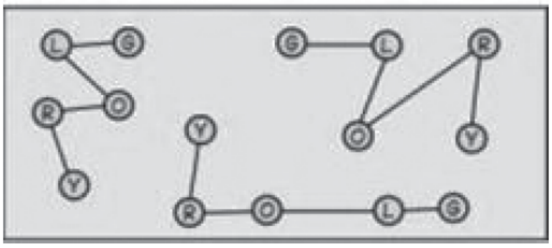
（10）

$$P(\text{Monday} \cap \text{Tuesday}) = P(\text{Monday})P(\text{Tuesday})$$

（11）



（12）



（13）

$$12.874752 \text{ km}$$

（14）

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

（15）

$$\alpha \wedge \omega$$

（16）

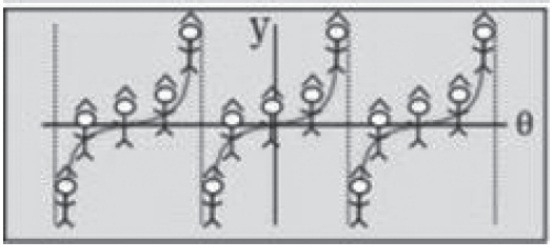
$$\lfloor 13 \rfloor$$

（17）

$$F = \{x : x \text{ is a fear}\}$$

$$\sum_{x \in F} x$$

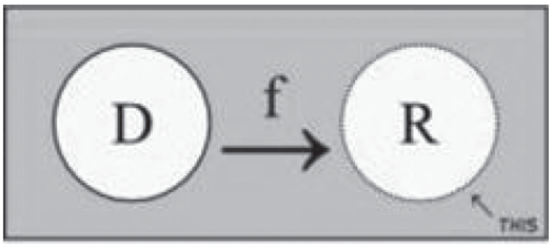
（18）



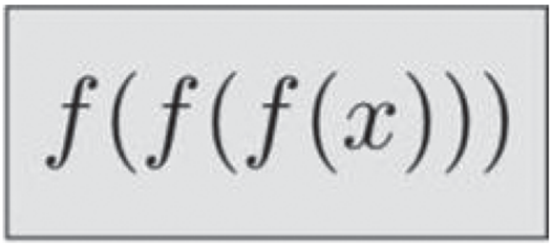
（19）

$$\int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{d\text{Joan}}{dx}\right)^2} \, dx$$

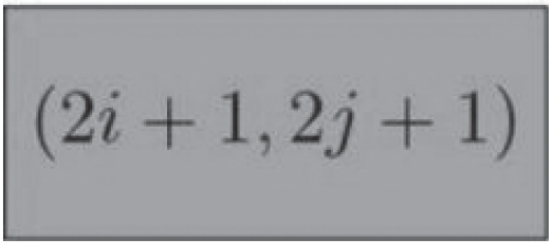
（20）



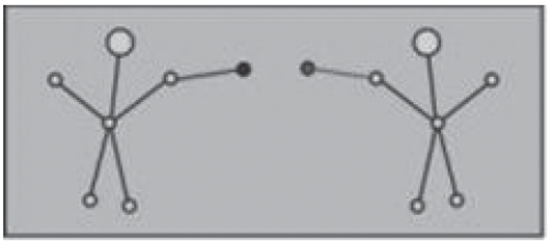
（21）



（22）



（23）



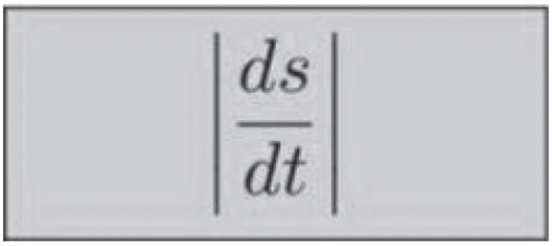
（24）

（25）

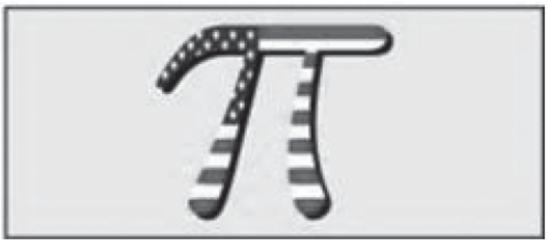
（26）

（27）

（28）

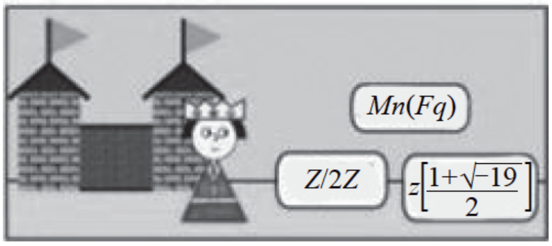


（29）



（30）

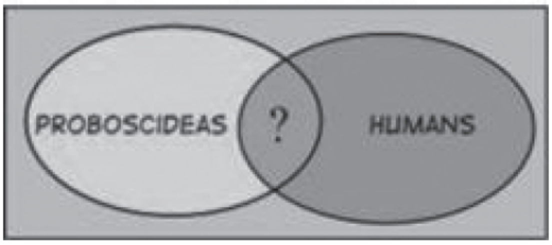
（31）



（32）

（33）

（34）



（35）

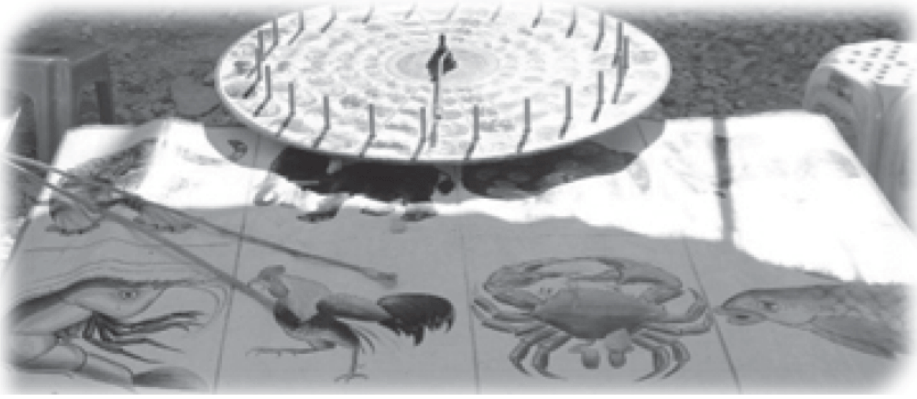
（36）

第三节　概 率 游 戏

一、庄家会输吗?

某地区每逢春节，都流行一种对图有奖的游戏。通常在一张白布的上方设有一个标题：“对图有奖”。在标题下方有六种方格，方格里面有葫芦、小钱、鸡、鱼、虾、螃蟹六种图案。参赌者把钱押在任意一个方格里作为赌注，钱多

钱少随意。然后，把三个骰子（骰子的六个面分别对应着方格里的六种图案）扣在一个碗里，摇动骰子。如果有一个骰子与所押的图案相同，那么你拿回你的赌注并赢得同样数目的钱；如果有两个骰子与所押的图案相同，那么你拿回你的赌注并赢得两倍赌注的钱；如果有三个骰子与所押的图案相同，那么你拿回你的赌注并赢得三倍赌注的钱。当然，如果三个骰子都没有所押方格的图案，赌注就归庄家。



举例来说，假如你在有鱼的方格中押上 10 元，如果有一个骰子摇出来有鱼的图案，你拿回你的 10 元并另外得到 10 元；如果有两个骰子摇出来有鱼的图案，你拿回你的 10 元并另外得到 20 元；如果有三个骰子摇出来有鱼的图案，你拿回你的 10 元并另外得到 30 元。

这个游戏，参赌者胜算的机会到底有多大，似乎没人能说清。设局者说，游戏是公平的，纯属娱乐，是为了增加节日气氛。参赌者可能会想，任押一个

图案，每个骰子出现此图案的机会都是 1/6，三个骰子中出现此图案的机会就是 3/6 了，取胜的机会不就是 50% 吗？由此说来，这个游戏是公平的，只是凭运气了。当然，设局的庄家希望参赌者都这么想。

那么我们从概率论的角度来对其进行分析：

假设在六个不同图案的方格中都押上 10 元，如果三个骰子出现互相不同的图案，那么庄家总是拿进 30 元并付出 30 元。如果两个骰子出现相同的图案，庄家则拿进 40 元并付出 30 元，他就赚了 10 元。如果三个骰子图案都相同，庄家拿进 50 元并付出 30 元，那他就赚了 20 元。久而久之，一个参赌者无论在哪个方格押注，都会输钱。

假设参赌者在图案为鱼的方格上押注 10 元。摇动骰子后，骰子上只出现 1 条鱼、2 条鱼、3 条鱼、不出现鱼的概率分别是

$$P_1=\frac{C_3^1(C_5^1)^2}{(C_6^1)^3}=\frac{75}{216} \qquad P_2=\frac{C_3^2C_5^1}{(C_6^1)^3}=\frac{15}{216}$$

$$P_3=\frac{1}{(C_6^1)^3}=\frac{1}{216} \qquad P_0=1-(P_1+P_2+P_3)=\frac{125}{216}$$

以 N 次押注计算，赢得 10 元、20 元、30 元、−10 元的次数分别为 NP_1、NP_2、NP_3、NP_0，平均收益为

$$\frac{10NP_1+20NP_2+30NP_3+(-10)NP_0}{N}=10P_1+20P_2+30P_3+(-10)P_0\approx-0.79$$

即平均每次输掉 0.79 元。

所以说，还是庄家的胜算更大，这个游戏其实并不公平。

赌徒输光定理

在“公平”的赌博中，任意一个赌徒都有可能会赢。谁输谁赢是偶然的。只要长期赌下去，必然有一天会输光。

二、我们的生日相同吗？

以 1 年 365 天计算（不考虑闰年因素），如果你肯定在某人群中至少有两人生日相同，那么这群人的个数是多少？大家不难得到结果：366 人，只要人数超过 365 人，必然会有人生日相同。但如果一个班有 50 个人，他们中间有人生日相同的概率是多少？你可能会认为，大概 20% ～ 30% 吧！错，有 97% 的可能！

现在要使房间中至少有两个人存在生日相同的概率大于 50%，房间里需要有多少人呢？要使这一概率大于 90%，又需要有多少人呢？

解答此题的一种方法是逆向思考这一问题，考虑在特定人数的情况下，不存在生日相同的概率。如果房间中只有一个人，由于不存在与之共享生日的人，因此一定没有相同生日。在这种情况下，不存在相同生日的概率为 1。必定会发生的事件的概率为 1。而另一个极端，当房间中有 367 个人时，由于没有足够多的生日，因此必定至少存在一个相同生日。

现在，假设第二个人进入此房间。此人与第一个进入此房间的人生日不同的概率为 365/366 或 0.997，相同生日的概率为 1−0.997=0.003。因为有 366 个可能的生日，而只有一个与第一个人的生日相同。

如果房间中前两个人的生日不同，此时第三个人走进来，已经有两个生日被占用了，因此第三个人与其室友的生日均不相同的概率为 364/366，这三个人生日各不相同的概率为 $1\times(365/366)\times(364/366)=0.992$，仍大于 99%。因此，房间中有 3 个人时，存在相同生日的概率为 1−0.992=0.008，低于 1%。

可以继续计算人数为任意值时生日各不相同的概率：

$$1\times(365/366)\times(364/366)\times(363/366)\times(362/366)\cdots$$

情况随人数的增加而迅速变化。房间中有 10 个人时，存在相同生日的概率大于 10%。用超级精度软件 （小数点后无失真记录到 38 位）计算得到存在相同生日的概率如下：

50 人时的概率是：0.970 373 579 577 988 399 918 655 204 368 403 865 88

41 人时的概率是：0.903 151 611 481 735 401 739 288 507 233 671 568 02

35 人时的概率是：0.814 383 238 874 715 232 759 395 290 782 250 438 34

30 人时的概率是：0.706 316 242 719 268 659 956 239 658 677 303 661 81

23 人时的概率是：0.507 297 234 323 985 407 225 417 228 337 032 500 25

也就是说，房间中有 23 个人时，存在相同生日的概率略大于 50%，当人数达到 41 人时，此概率超过 90%，当人数达到 50 人时，此概率超过 97%。

但是，如果换一个角度，要求你遇到的人中至少有一人和你生日相同的概率大于 50%，你最少要遇到 253 人才行。

因为你与另一个人生日不同的概率为 364/365，你与其他 $n-1$ 个人生日不同的概率为 $P = (364/365)^{n-1}$，相同概率为 $(1-P)$。当 n=254 时，生日相同的概率为 50.05%>1/2。

我们还可以来看一些有趣的数字：

当 n=14 时，就能保证房间里有 2 个人生日相差 1 天的概率大于 1/2；

当 n=32 时，即 16 个男生和 16 个女生，才能保证房间里有 1 个男生和 1 个女生生日相同的概率大于 1/2；

当 n=88 时，才能保证房间里有 3 个人生日相同的概率大于 1/2；

当 n=1 000 时，才能保证房间里有 9 个人生日相同的概率大于 1/2；

上述“生日相同”问题，类似于将小球放入不同的隔间里的“占位问题”。对于生日问题，隔间的数目就是一年的天数 365，小球对应“人”，男生与女生，则对应两种不同颜色的小球。

三、蓝色眼睛会消失吗?

假设眼睛的颜色是由 B 和 b 两个因子决定的（B 是棕色眼睛因子，显性因子；b 是蓝色眼睛因子，隐性因子），每个人都携带 bb、bB 和 BB 三种基因型中的一种。

例如，在一个群体中，20% 的人基因型是 bb，20% 的人基因型是 bB，60% 的人基因型是 BB。只有纯合基因型 bb 的人眼睛才是蓝色的。随机配对后，b 因子遗传的概率多大呢？

由于 b 因子遗传的概率（b 因子在 bb、bB 和 BB 三种基因中的占比）为 20%+20%×0.5=0.3，B 因子遗传的概率为 0.7。如下表所示，下一代中基因型 bb 的概率为 0.09，BB 型为 0.49，杂合型基因 bB 和 Bb 是一样的，该基因型出现的概率为 0.21+0.21=0.42。

因子	b		B	
b	bb	0.3×0.3=0.09	bB	0.3×0.7=0.21
B	Bb	0.7×0.3=0.21	BB	0.7×0.7=0.49

因 B 是显性因子，下一代中共有 42% + 49%=91% 的人眼睛为棕色，只有 9% 的人眼睛是蓝色。即

$$20\%，20\%，60\% \longrightarrow 9\%，42\%，49\%$$

在下一代的 b 和 B 因子的遗传概率为

b：0.09+0.42×0.5=0.3

B：0.5×0.42+0.49=0.7

这和之前 b 和 B 的遗传概率相同。仍然是

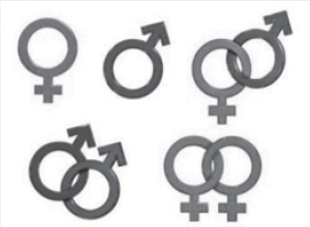
因子	b		B	
b	bb	0.3×0.3=0.09	bB	0.3×0.7=0.21
B	Bb	0.7×0.3=0.21	BB	0.7×0.7=0.49

那么在下一代中 bb、bB 和 BB 基因型的分布和上一代也是一样的。蓝眼睛的基因型 bb 不但不会灭绝，而且其比例稳定在了 9%。

$$20\%，20\%，60\% \longrightarrow 9\%，42\%，49\%，\cdots，9\%，42\%，49\%$$

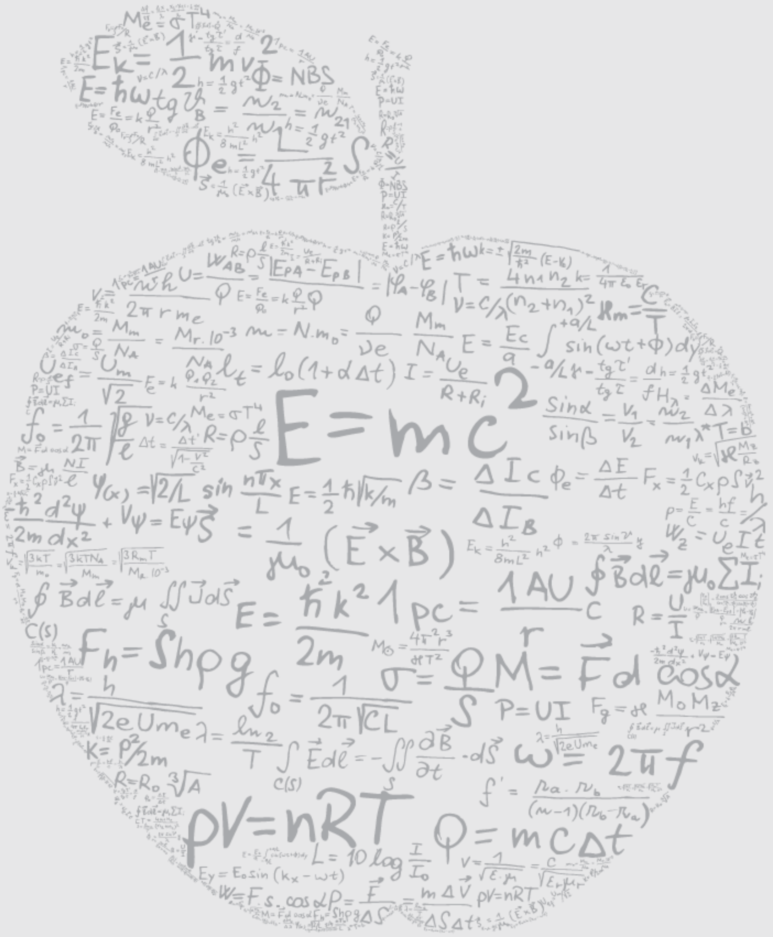
上述遗传规律由英国数学家哈代和德国医师威廉·温伯格于 1908 年同时发现。

哈代—温伯格定律（遗传平衡定律）



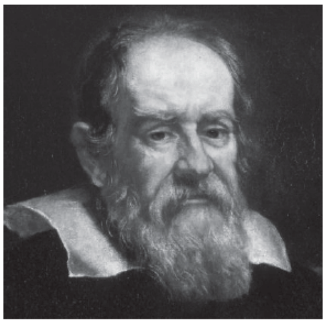
在理想状态下，不管初始时因子如何分布，基因型的比例每代都保持恒定，并且遗传概率也保持恒定。该理想状态要满足 5 个条件：①种群足够大；②种群中个体间可以随机交配；③没有突变发生；④没有新基因加入；⑤没有自然选择。

一个家庭中有两个小孩，已知其中有一个是女孩，则这时另一个小孩是男孩的概率是多少？（假定一个小孩是男孩还是女孩是等可能的）



第三章

数学之巧



伽利略

“我们生活在受精确的数字定律制约的宇宙中。”

——伽利略 / 物理学家

生活在数字宇宙中的我们，时时处处都在感受着数学的存在。要激发学习数学的兴趣，就要调动学习的内在动力，到生活中去寻找数学，认识到现实生活中蕴含大量的数学信息，数学在现实世界中有着广泛的应用。

第一节　我们该如何理财

一、不积小流无以成江海

国王要出多少米?

传说，有一位古希腊的学者在帮助国王解决了一个大难题后，骄傲的国王说，我的国库里什么都有，随你要什么我都可以满足你，学者看着不可一世的国王，随手指了指国王身边的国际象棋棋盘，说：“这个棋盘上共有 64 个格子，一个格子代表一天，你只要在第一天给我一粒米，第二天加倍给我二粒米，第三天再加倍给我四粒米……送完这 64 个格子这可以了”，

国王答应了学者的要求。

然而，算到最后，却让国王大吃一惊，要把这 64 格棋盘放满的话，需要 1 844 亿万粒米。据粮食部门测算，1 公斤大米约有米粒 4 万粒。换算成标准吨后，约等于 461 亿吨。按照今日国际米粒价格来算，这 64 格子的总数，即使是花尽世界富豪：比尔·盖茨和巴菲特的财富，还不够其总数的 1%。这就是复利的威力，其也被爱因斯坦称为“世界的第八大奇迹”。

换钱游戏

小明和小华玩游戏，小明说：假如我每天给你 1 万元，给一个月；你每天给我 1 分钱、2 分钱、4 分钱，以此类推，持续给一个月，你愿意换吗？小华想了想，应该不划算，摇摇头说不换。

小明又说，那我每天给你 10 万元，给一个月；你每天给我 1 分钱、2 分钱、4 分钱，以此类推，持续给一个月，这次换不换？小华一听，每天 10 万元，一个月就是 300 万元，应该稳赚不赔，于是爽快地答应了，小明笑了。聪明的你，知道在这个游戏里，谁亏了吗？亏了多少？

天数	金额（元）	天数	金额（元）	天数	金额（元）
第 1 天	0.01	第 11 天	10.24	第 21 天	10 485.76
第 2 天	0.02	第 12 天	20.48	第 22 天	20 971.52
第 3 天	0.04	第 13 天	40.96	第 23 天	41 943.04
第 4 天	0.08	第 14 天	81.92	第 24 天	83 886.08
第 5 天	0.16	第 15 天	163.84	第 25 天	167 772.16
第 6 天	0.32	第 16 天	327.68	第 26 天	335 544.32
第 7 天	0.64	第 17 天	655.36	第 27 天	671 088.64
第 8 天	1.28	第 18 天	1 310.72	第 28 天	1 342 177.28
第 9 天	2.56	第 19 天	2 621.44	第 29 天	2 684 354.56
第 10 天	5.12	第 20 天	5 242.88	第 30 天	5 368 709.12

很显然，小明每天给小华 10 万元，一个月就是 300 万元。那么小华要给小明多少呢？我们来算一下。第一天给 1 分，第二天给 2 分，第三天给 4 分，以此类推，那么第 30 天就是给 $2^{(30-1)}$ 分，$2^{(30-1)}$ = 536 870 912 分，也就是 536 870 9.12 元。也就是说，光第 30 天给的金额，就有五百多万元。一个月加起来总共是一千多万元。

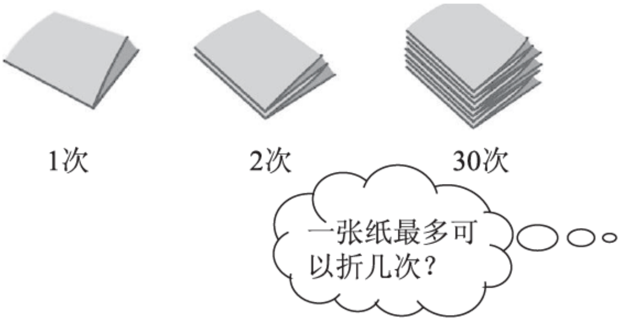
折纸游戏

一张足够大的白纸，厚度大约为 0.1 毫米（1 万张摞在一起才 1 米多高），如果将这张白纸连续对折 52 次，这张纸的厚度会是多少呢？是冰箱那么高？还是一层楼那么高？又或者一幢摩天大楼那么高？我们可以来看下面的表格。

A4 纸对折后的高度（米）	
第 1 次对折后	0.000 2
第 2 次对折后	0.000 4
第 3 次对折后	0.001 6
第 4 次对折后	0.003 2
第 5 次对折后	0.006 4
第 6 次对折后	0.012 8
第 7 次对折后	0.025 6
依此类推……	
第 52 次对折后	450 359 962 737 050 0

结果是 450 359 962 737 050 0 米 =450 359 962 737 0.5 公里≈ 450 359 96 万公里。450 359 96 万公里是什么概念？地球到月球的距离是 38.4 万公里。所以从理论上讲，只要给你一张足够大的纸，你就能到达月球。

给你一张足够大的纸，你能把它对折多少次？



单利和复利

单利（simple interest）是指按照固定的本金计算的利息，它是计算利息的一种方法。单利的计算取决于所借款项或贷款的金额（本金），资金借用时间的长短及市场一般利率水平等因素。按照单利计算的方法，只要本金在贷款期限中获得利息，不管时间多长，所生利息均不加入本金重复计算利息。这里所说的“本金”是指贷给别人以收取利息的原本金额。“利息”是指借款人付给贷款人超过本金部分的金额。

单利计算公式：$A=P(1+n\times i)$

公式中的符号含义：

P——本金，又称期初金额或现值；

i——利率，通常指每年利息与本金之比；

A——本金与利息之和，又称终值；

n——计息期数，通常以年为单位。

复利是指在每经过一个计息期后，都要将所生利息加入本金，以计算下期的利息。这样，在每一个计息期，上一个计息期的利息都将成为生息的本金，即以利生利，也就是俗称的“利滚利”。

复利计算公式：$A=P(1+i)^n$

我们先来看一个复利的例子。假设本金为 1 元，年利率 100%，半年利率

50%，季度利率 25%，每年存一次，每半年存一次，每季度存一次，一年后的本息和各是多少？以此类推，我们不断缩短复利的计算周期，一年后本息和是不是会变得很多呢？

根据复利公式，我们把计算结果做成下表：

计算复利的周期	本息和 / 元
年	2.000 00
半年	2.250 00
季度	2.441 41
月	2.613 04
周	2.692 60
天	2.714 57
小时	2.718 13
分	2.718 28
秒	2.718 28

从上表中的计算结果可知，即使我们不断缩短复利的计算周期，一年后的本息和也不会无限增大，而是收敛于一个值——2.718 28。这个值，我们是否似曾相识呢？对，它就是无理数 e。

e 是个无理数，我们无法知道它的精确值。

e 的定义为：当 $n\to\infty$ 时，$(1+1/n)^n$ 的极限。

e 还可以写成表达式：e=1+1/1!+1/2!+1/3!+1/4!+1/5!+1/6!+ ···

因此，复利公式又可写为

$$A=P(1+i)^n = P(1+i/m)^{tm} = P \cdot e \text{（当 } m\to\infty \text{时）}$$

其中：P 为本金；A 为本金与利息之和；i 为年利率；n 为计息期数（年）；t 为计息周期利率；m 为一年内具有的计息周期个数。如 t 为月利率，则 m 就

为 12。

复利估算法——72 法则

72 法则是一条用于估计金钱翻倍所需时间的经验法则。时间单位可以是年，也可以应用于月和日。

金钱翻倍周期 =72/（利率 ×100）

二、金钱也是“越老越值钱”

现值 查理的父亲说要在 10 年后给他 10 万元创业，查理现在就想要这笔钱，他来到银行许诺 10 年后拥有 10 万元，要银行贷款给他。银行说时间就是金钱，10 年后的 10 万元跟现在的 10 万元是两码事，银行认为 12% 的年利率是一个比较好的收益，于是就给了查理 32 197.32 元，查理被这么小的数字震惊了。

对于这个问题，可以使用复利公式 $A=P(1+i)^n$，其中 A 为 10 万元，i 是利率 0.12，周期为十年，所以 $100\,000=P(1+0.12)^{10}$，得出 P 为 32 197.32 元。

年金终值 查理的父亲已经承诺 10 年后给他 10 万元创业，于是父亲现在需要准备这笔钱，父亲打算在 10 年中的每年年末存入等额的钱，到了第 10 年年末他可以将这笔钱交给查理，查理用这笔钱来偿还银行贷款。查理的父亲找到了一个年利率 8% 的存款账户，那么此时查理的父亲每年需存入多少钱呢？

查理的父亲之前用复利公式时，他只需要考虑一个存款额（原始本金），但是，他现在要考虑的是不同时间内存入的 10 次存款。利率用 i 表示，每年年末定期存入的款额为 R，则 n 年后的总额可以根据定期公式来算。

$$A=R\cdot[(1+i)^{n}-1]/i$$

所以应为

$$100\,000=R\cdot[(1+0.08)^{10}-1]/0.08$$

$$R=6\,902.95$$

年金现值 这时查理的父亲收到了一笔退休金，他打算用来购买一份年金，每年年末他可以领到多少钱？

这类问题属于现值定期支付问题，相当于向银行贷款等额偿还问题，只不过是查理的父亲把钱给了银行，银行以分期付款的方式向他支付年金。公式为

$$A=R\cdot[(1+i)^{n}-1]/[i(1+i)^{n}]$$

其中，A 为存入的退休金；i 为年利率；n 为周期；R 为每年领取的年金。

在实际应用中，我们计算金钱的现值、终值，以及年金现值、年金终值时，不必按上面推导的公式来计算得那么复杂，只要在现值系数表、终值系数表、年金现值系数表和年金终值系数表中找到相关的系数，再进行简单的乘除就可以算出来了。

年金现值系数表（PVIFA 表）

n	1%	2%	3%	4%	5%	6%	8%	10%	12%	14%	15%	16%	18%
1	0.99	0.98	0.97	0.961	0.952	0.943	0.925	0.909	0.892	0.877	0.869	0.862	0.847
2	1.97	1.941	1.913	1.886	1.859	1.833	1.783	1.735	1.69	1.646	1.625	1.605	1.565
3	2.94	2.883	2.828	2.775	2.723	2.673	2.577	2.486	2.401	2.321	2.283	2.245	2.174
4	3.901	3.807	3.717	3.629	3.545	3.465	3.312	3.169	3.037	2.913	2.854	2.798	2.69
5	4.853	4.713	4.579	4.451	4.329	4.212	3.992	3.79	3.604	3.433	3.352	3.274	3.127
6	5.795	5.601	5.417	5.242	5.075	4.917	4.622	4.355	4.111	3.888	3.784	3.684	3.497

例如，你要贷款 100 万元买房子，计划贷款 20 年，如果贷款利率为 5%，那你每个月要还银行多少钱呢？

我们可以通过查上表所示的年金现值系数表，通过 n=20，i=5%，查到年

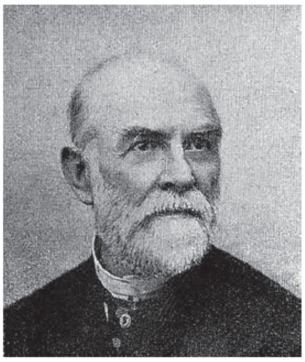
金现值系数为 12.462，我们只需要用 1 000 000 元除以年金现值系数 12.462，再除以 12 个月，就可得到你每月需还银行 6 687 元。

理财投资要趁早，有没有投资理财其实在初期看起来差距不大，但随着时间的复利效果，货币的时间价值将会呈倍数成长，等到我们惊觉当年的同窗好友都已经从容退休，准备环游世界享受退休后的悠闲生活时，我们还必须每天忙于上下班打卡，相信那时有再多的后悔也无法让时光倒流了。

当然，投资理财更重要的是资金安全。黄金分割法是一种分散风险的家庭理财技巧。投资者可将资金分成两部分，一部分存入银行，获得利息；另一部分投资于证券，买入股票或基金，等待分红或涨升，投资于证券与存款的比例大体保持在 4∶6 的比例。这一比例符合数学中的黄金分割，基准点为 0.618，即 62% 左右。采用黄金分割法的优点是，在证券进行了适当的投资，有时可获得较高的收益，虽证券投资风险较大但由于一半以上的资金投向了安全性较高的存款，能使投资者有一种心理稳定感，即使在别的投资方面暂时失利，也不至于损失太大。

丁先生有一处房产欲出售，现有人提出一次性付款 24 万元购买，另一人愿每年年末支付 6 万元，连续支付 5 年购买。那么，丁先生应该选择哪一种报价？（假设当时利率为 10%）

三、你的生活达到小康水平了吗？



恩格尔

19 世纪德国统计学家恩格尔根据统计资料，对消费结构的变化得出一个规律：一个家庭的收入越少，家庭收入中（或总支出中）用来购买食物的支出所占的比例就越大，随着家庭收入的增加，家庭收入中（或总支

出中）用来购买食物的支出份额则会下降。众所周知，吃是人类生存的第一需要，在收入水平较低时，其在消费支出中必然占有重要地位。随着收入的增加，在食物需求基本满足的情况下，消费的重心才会开始向其他方面转移。

推而广之，一个国家越穷，每个国民的平均收入中（或平均支出中）用于购买食物的支出所占比例就越大，随着国家的富裕，这个比例呈下降趋势，即随着家庭收入的增加，购买食物的支出比例则会下降。

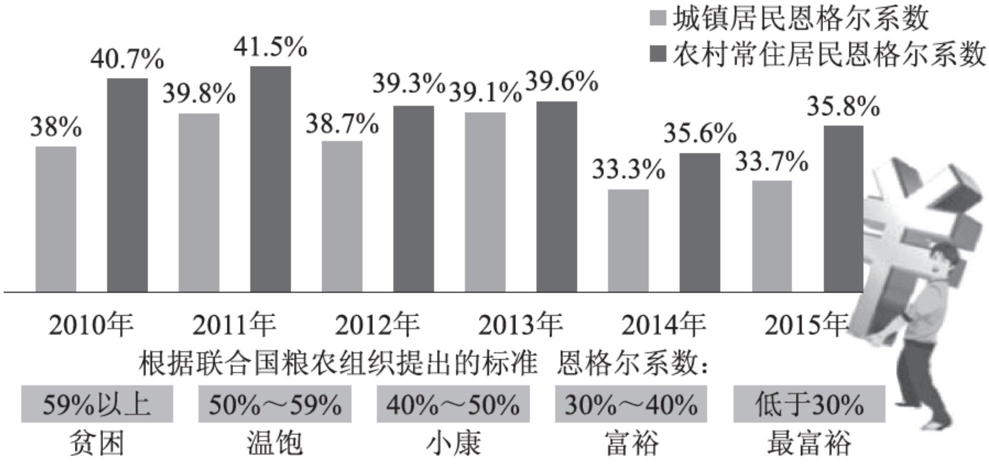
恩格尔系数 (Engel’s Coefficient) 是食品支出总额占个人或家庭消费支出总额的比重，也是根据恩格尔定律得出的比例数，其为衡量生活水平高低的一个指标。其计算公式如下：

$$\text{恩格尔系数}=\frac{\text{食品支出总额}}{\text{家庭或个人消费支出总额}}\times 100\%$$

可以看出，在总支出金额不变的条件下，恩格尔系数越大，说明用于食物支出的所占金额越多；恩格尔系数越小，说明用于食物支出所占的金额越少，二者成正比。反过来，在食物支出金额不变的条件下，总支出金额与恩格尔系数成反比。因此，恩格尔系数是衡量一个家庭或一个国家富裕程度的主要标准之一。

恩格尔系数	生活水平
>59%	贫困
50% ～ 59%	温饱
40% ～ 50%	小康
30% ～ 40%	富裕
<30%	最富裕

一般来说，在其他条件相同的情况下，恩格尔系数较高，作为家庭来说，则表明收入较低；作为国家来说，则表明该国较穷。反之，恩格尔系数较低，作为家庭来说，则表明收入较高；作为国家来说，则表明该国较富裕。



我国 2010—2015 年城镇与农村恩格尔系数对比

支付宝推广初期，在很多水果店搞优惠活动。开始几天，买水果用支付宝付账满 6 元减 5 元，确认付账之后，买家实际花费 1 元，另外 5 元由支付宝补贴给商家。此时，由于是每单固定减 5 元，若要实现利益最大化，最好的办法是每天都只买 6 元或多一点的水果，这样 1 元钱当 6 元钱用。过了几天，支付宝的优惠变了，变成满 22 元减 5 元。这样一来，就变成 17 元当 22 元用，相当于七七折。优惠力度减少后，水果店生意也没那么好了。那有没有办法使得水果店生意回到前几天的火爆状态呢?

第二节　我们如何分配食物

细心的人会发现，我们早晨起床刷牙用的牙膏，其包装有大有小，价格也不相同。你想过大小包装与其价格之间的关系吗？你吃东西时，想过营养成分的搭配吗？你在开灯、关灯时，想过灯的位置与照明度的问题吗？你在开、关

窗户时，想过窗户的面积与采光量的问题吗？在烈日下，你想过遮阳棚搭建方式与遮挡太阳光线有关吗？你在购买商品时，想过哪儿才能买到最便宜的东西吗？这些生活问题，都跟数学息息相关。

一、如何省钱又保证营养

杨华十分注重锻炼，她每天去健身房，并且非常严格地控制着她的饮食。杨华以兼职的方式养活自己，所以她对生活精打细算。对于她来说，每个月摄取适量的矿物质和维生素以保持舒适和健康是最重要的事情。饮食量由她的教练决定。教练建议她每个月至少应摄入 120mg 的维生素和 880mg 的矿物质。为了确保遵循这个指示，她的食物里主要包括两个部分：固体形式的食物和液体形式的食物。

3 月初，杨华前往超市购买这两种食品。在一包固体食物的背面，她发现该食物包含 2mg 的维生素和 10mg 的矿物质，而另一盒液体食物则包含 3mg 的维生素和 50mg 的矿物质。于是，她在购物车中放入 30 包固体食物和 5 盒液体食物，作为该月的食物。在结账之前，她要知道这些食物是否已经达到了教练的要求。她首先算出了购物车中的食物总共含有多少维生素。

食品种类 / 营养成分	固体食物	液体食物	要求
维生素	2mg	3mg	120mg
矿物质	10mg	50mg	880mg

30 包固体食物中总共含有 2×30=60mg 维生素，而 5 盒液体食物总共含有 3×5=15mg 维生素。因此，食物中总共 2×30+3×5=75mg 维生素。使用相同的计算方式，可以算出矿物质的总量为 10×30+50×5=550mg。

教练的要求是至少 120mg 维生素和 880mg 矿物质，因此，她需要在购物车中放下更多的食物。杨华现在的问题是如何分配固体食物和液体食物的购买量，使得其中维生素和矿物质的含量正好达到要求。她重新回到超市的保健食品区，增加了这两种食物的购买量。她选购了 40 包固体食物和 15 盒液体食物。这下肯定够了吗？她重新算了一下，现在的维生素含量是 2×40+3×15=125mg，而矿物质含量是 10×40+50×15=1 150mg。现在杨华肯定已经达到了教练的要求，甚至超过了他要求的量。

➢ 可行解

对杨华来说，两种食物的组合（40，15）可以到达要求。我们将其称为一个可能组合或可行解。我们已经看到（30，15）不是一个可行解，因此这两种食物的所有组合方式可以划分为两部分——满足饮食要求的可行解和不满足要求的非可行解。

杨华还有很多其他的选择。她可以在购物车中全部放入固体食物，如果这样做的话，可能至少要买 88 包。组合（88，0）同时满足两项要求，其维生素含量是 2×88+3×0=176mg，而矿物质的含量为 10×88+50×0=880mg。如果她只购买液体食物，那么她至少要买 40 盒，可行解（0，40）同时满足两项要求。因为维生素含量为 2×0+3×40=120mg，而矿物质的含量为 10×0+50×40=2 000mg。我们可能会注意到，这些可能组合并不是恰好满足对维生素和矿物质的要求，不过教练肯定会认为杨华的购买量是足够的。

方案	固体食物（包）	液体食物（盒）	维生素含量	矿物质含量
第一种	88	0	176mg	880mg
第二种	0	40	120mg	2 000mg

➢ 最优解

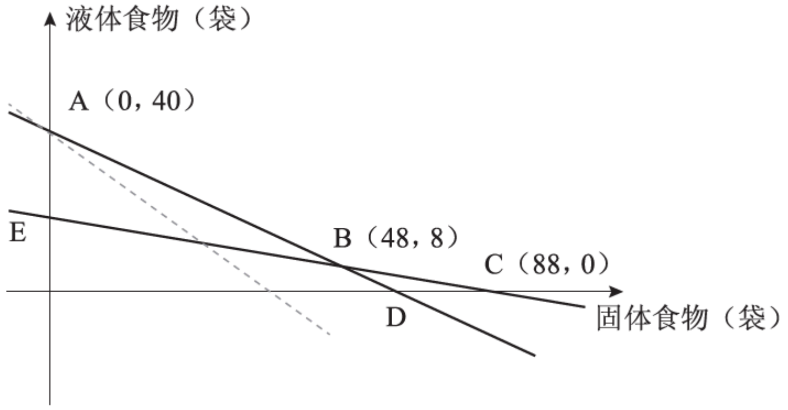
现在，我们再把开销考虑进来。杨华必须到收银台为这些食物买单。她注

意到这两种食物的单价都是50元。对于以上找到的几个可行解（40，15）、（30，15）、（88，0）、（0，40），其支付总额分别为2 750元、2 250元、4 400元、2 000元。因此，到现在为止，最好的方案就是只购买40盒液体食物。这个方案是满足要求的所有方案中开销最少的一个。但是，这些方案中的维生素和矿物质含量并不是恰好满足要求，总有一项超出要求。一时冲动，杨华尝试了其他一些固体食物和液体食物的组合方式，并计算它们分别需要花费多少钱。它可以做得更好吗？是否有一种组合搭配，在满足教练的要求的同时又能实现开销最少？

我们可以设杨华每月需要 x 包固体食物，y 包液体食物。同时必须满足：

$$2x+3y>120 \text{ 和 } 10x+50y>880$$

首先，画出一张下图所示的可行解区域图，将可行解可视化。直线AD表示的是恰巧包含120mg维生素的固体食物和液体食物组合，而直线EC表示的是包含880mg矿物质的食物组合。同时在这两条线上方的区域（ABC上方）是可行解区域，它表示杨华可以购买的所有可能的组合方式。



如上图所示，我们又可以找到一个新可行解，也就是B点，坐标为（48，8），即她可以购买48包固体食物和8盒液体食物，如果她这么做的话，饮食要求正好可以被满足，因为这种组合中包含120mg的维生素和880mg的矿物质。

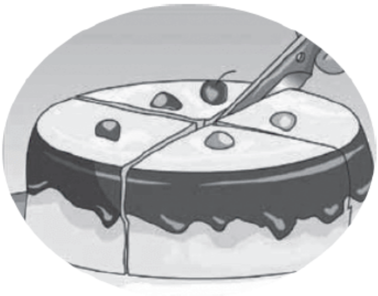
我们可以列一个开销方程：$A=50x+50y$

但是从开销的角度，对于（48，8）组合，她要支付2 800元。到底哪个

才是最优解呢？其实，根据开销方程，我们可以做一条斜率为 -1 的直线，然后把这条直线在坐标轴上平移，这条直线最先碰到可行解区域的那个点，就是最优解。因此，从上图中我们知道，最优解仍然是（0，40）组合。

我们把与饮食问题类似的问题称之为线性规划问题。线性规划模型已被应用到了饮食之外的许多其他场合。其中一类是运输问题，该问题所关心的是如何将货物从工厂运输到仓库，最终目标是将运输成本最小化。有些线性规划问题目标是将某些量最大化，如最大化利润。

二、切蛋糕也有学问



有一个经典的两个人分蛋糕的问题——为了实现公平性，只需要一个人切，另一个人选即可。这样一来，不管对方选择了哪一块，他都能保证自己总可以得到蛋糕总价值的 1/2 。这也是经典的“你来分我来选”的方法。

不过，在现实生活中，情况远没有那么理想。你想吃奶油，我想吃巧克力，他想吃水果……如果分蛋糕的人对蛋糕各部分的价值看法有分歧，还能实现公平的分割吗？如果分蛋糕的人不止两个人呢？

细究起来，这种“一刀切”的方法也不是完全公平的。对于分蛋糕的人来说，两块蛋糕的价值均等，但对于选蛋糕的人来说，两块蛋糕的价值差异可能很大。因此，选蛋糕的人往往能获得大于 1/2 的价值。一个简单的例子就是，蛋糕表面是一半草莓一半巧克力的。分蛋糕的人只对蛋糕体积感兴趣，于是把草莓的部分分成一块，把巧克力的部分分成一块；但他不知道，选蛋糕的人更偏爱巧克力一些。因此，选蛋糕的人可以得到的价值超过蛋糕总价值的一半，而分蛋糕的人只能恰好获得一半的价值。

而事实上，更公平一些的做法是，前一个人得到所有草莓部分和一小块巧

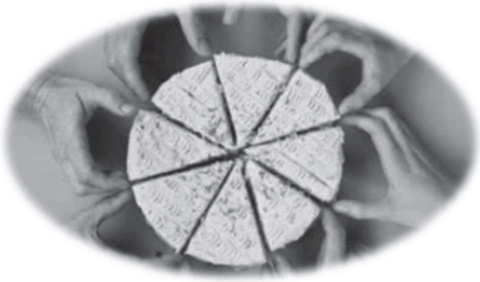
克力部分，后面那个人则分得剩下的巧克力部分。这样便能确保两个人都可以得到一半多一点的价值。但是，要想实现上面所说的理想分割，双方需要完全公开自己的信息，并且要能够充分信任对方。然而，在现实生活中，这是很难做到的。考虑到分蛋糕的双方尔虞我诈的可能性，实现绝对公平几乎是不可能完成的任务。

因此，我们只能退而求其次，给“公平”下一个大家普遍能接受的定义。在公平分割 (fair division) 问题中，有一个最为根本的公平原则叫作“均衡分割”(proportional division) 。它的意思就是， 如果有 n 个人分蛋糕，则每个人都认为自己得到了整个蛋糕至少 $1/n$ 的价值 。从这个角度来说，“你来分我来选”的方案是公平的——在信息不对称的场合中，获得总价值的一半已经是很让人满意的结果了。

如果分蛋糕的人更多，均衡分割同样能够实现，而且实现的方法不止一种。

你来分我来选

一种简单的方法就是，每个已经分到蛋糕的人都把自己手中的蛋糕分成更小的等份，让下一个没有分到蛋糕的人来挑选。具体地说，先让其中两个人把蛋糕分成两块；然后，每个人都把自己手中的蛋糕分成三份，让第三个人从每个人手里各挑出一份来；然后，每个人都把自己手中的蛋糕分成四份，让第四个人从这三个人手中各挑选一份；不断这样继续下去，直到最后一个人选完自己的蛋糕。只要每个人在切蛋糕时能做到均分，无论哪块被挑走，他都不会吃亏；而第 n 个人拿到了每个人手中至少 $1/n$ 的小块，合起来自然也就不会少于蛋糕总价值的 $1/n$。虽然这样下来，蛋糕可能会被分得零零碎碎，但这能保证每个人手中的蛋糕在他自己看来都是不小于蛋糕总价值的 $1/n$ 的。

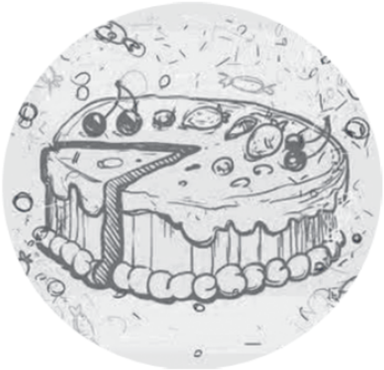


最后削减人算法

还有一种思路完全不同的分割方案也能做到均衡分割。我们还是把总的人数用字母 n 来表示。

首先，第一个人从蛋糕中切出他认为的 $1/n$，把这一小块传给第二个人。第二个人选择把这块蛋糕递交给第三个人，或者从中切除一小块，再交给第三个人。以此类推，每个人拿到蛋糕后都有一次“修剪”的机会，再移交给下一个人。规定，最后一个对蛋糕大小进行改动的人将获得这块蛋糕，余下的 $n-1$ 个人则从头开始重复刚才的流程，分割剩下的蛋糕。每次走完一个流程，都会有一个人拿到令他满意的蛋糕，下一次重复该流程的人数就会减少一人。不断这样做下去，直到每个人都分到蛋糕为止。

但是，均衡条件仅仅是一个最低的要求。如果对公平的要求稍加修改，上述方案的缺陷便暴露了出来。



让我们来看这样一种情况：如果 n 个人分完蛋糕后，每个人都自认为自己分得了至少 $1/n$ 的蛋糕，但其中两个人还是打起来了，可能是什么原因呢？由于不同的人对蛋糕各部分价值的判断标准不同，因此完全有可能出现这样的情况——虽然自己已经分到了至少 $1/n$ 份，但在他看来，有的人手里的蛋糕比他还多。

所以，我们平常所说的公平，至少还有一层意思——每个人都认为别人的蛋糕都没我手里的好。在公平分割理论中，我们把满足这个条件的分蛋糕方案叫作免嫉妒分割 (envy-free division) 。

免嫉妒分割是一个比均衡分割更强的要求。如果每个人的蛋糕都没我多，那我的蛋糕至少有 $1/n$，也就是说满足免嫉妒条件的分割一定满足均衡的条件。但反过来，满足均衡条件的分割却不一定是免嫉妒的。

比方说，A、B、C 三人分蛋糕，A 只在乎蛋糕的体积，但 B 只关心蛋糕上的草莓颗数，C 只关心蛋糕上的巧克力块数。最后分得的结果是，A、B、C 三人的蛋糕体积相等，但 A 的蛋糕上什么都没有，B 的蛋糕上有一颗草莓两块巧克力，C 的蛋糕上有两颗草莓一块巧克力。因此，每个人从自己的角度来看都获得了整个蛋糕恰好 1/3 的价值，但这样的分法明显是不科学的—— B、C 两人会互相嫉妒。

之前我们介绍的两种均衡分割方案，它们都不满足免嫉妒性。就拿第一种方案来说吧，如果有三个人分蛋糕，按照规则，首先应该让第一人分、第二人选，然后两人各自把自己的蛋糕切成三等份，让第三人从每个人手中各挑一份。这种分法能保证每个人获得至少 1/3 的蛋糕，但却可能出现这样的情况：第三个人从第二个人手中挑选的部分，恰好是第一个人非常想要的。这样一来，第一个人就会觉得第三个人手里的蛋糕更好一些，这种分法就不和谐了。

1960 年，John Selfridge 和 John Conway 各自独立地分析了人数为 3 的情况，构造出了第一个满足免嫉妒条件的三人分割方案。这种分割方案就被称为“Selfridge-Conway ”算法。

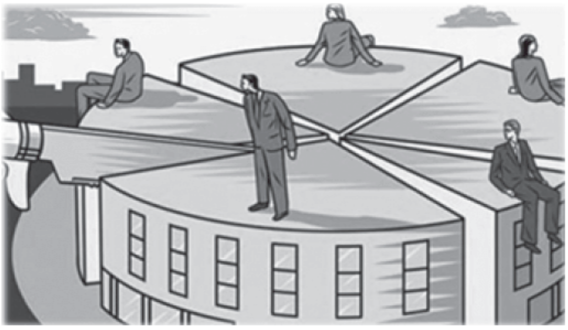
首先，A 把蛋糕分成三等份（当然是按照自己的看法来分的，后面提到的切分、选取也都是这样）。如果 B 认为这三块蛋糕中较大的两块是一样大的，那么按照 C、B、A 的顺序依次选取蛋糕，问题就解决了。麻烦在于 B 认为较大的两块蛋糕不一样大的情况。此时，B 就把最大的那块蛋糕的其中一小部分切下来，让剩余的部分和第二大的蛋糕一样大。被切除的部分暂时扔在一旁，在第二轮分割时再来处理。接下来，按照 C、B、A 的顺序依次选蛋糕，但有一个限制：如果 C 没有选那块被修剪过的蛋糕，B 就必须选它。

这样，三人就各分得了一块蛋糕。由于 A 是切蛋糕的人，对于他来说拿到哪一块都一样，因此 A 不会嫉妒别人。由于 B 选取的是两个较大块中的一个，因此 B 也不会嫉妒别人。由于 C 是第一个选蛋糕的，显然他也不会嫉妒别人。因此，就目前来说，三个人之间是不会有嫉妒发生的。

但是，还有一小块被切除的部分没分完，因此分割流程进入第二轮。

在 B 和 C 之间，一定有一个人选择了那块被修剪过的蛋糕。不妨把这个人重新记作 X ，另一个人就记作 Y 。让 Y 把最后那一小块分成三等份，按照 X、A、Y 的顺序依次挑选蛋糕，结束第二轮流程。这一轮结束后，每个人都又得到了一小块蛋糕。由于 X 是第一个选蛋糕的人， X 显然不会嫉妒别人；由于 Y 是分蛋糕的人， Y 也不会嫉妒别人。由于 A 比 Y 先选， A 不会嫉妒 Y 。最后，A 也是不会嫉妒 X 的，因为即使 X 拥有了第二轮中的全部蛋糕，X 手里的蛋糕加起来也只是第一轮开始时 A 等分出来的其中一块蛋糕，这是不可能超过 A 的。这就说明了，三个人之间仍然不会有嫉妒发生，Selfridge-Conway 算法的确满足免嫉妒条件。

不过，Selfridge-Conway 算法只能在三人分蛋糕时使用，并不能扩展到人数更多的情况。对于人数更多的情况，免嫉妒分割问题更加困难，目前数学家们还没有找到一个比较可行的方案。正如数学家 Sol Garfunkel 所说，分蛋糕问题是 20 世纪数学研究中最重要的问题之一。



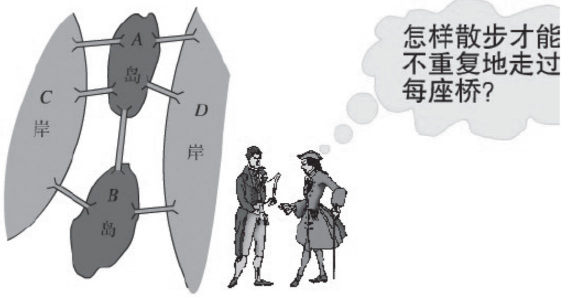
蛋糕作为一个连续体，可以按照切蛋糕者的意愿来分割。如果对于一些不可分割的财产，如房屋、名贵字画，我们又该如何分配，才能做到公平呢？

张三与李四从远亲处继承一所房屋与一箱文物，对两样东西张三的估价分别是 28 000 元和 56 000 元，李四的估价分别是 30 000 元和 60 000 元，两人怎样进行公平分配？如两人要求各得一样实物，又该如何进行公平分配？

第三节　我们如何规划出行

一、怎样散步才能不重复地走过每座桥?

传说在18世纪普鲁士的哥尼斯堡城，有一条叫作普雷格尔的河，河中间有两个岛，有七座桥把这两个岛与河岸相连。市民们饭后茶余就在讨论，能不能不重复的经过每一座桥而回到出发点呢。



1735年，大数学家欧拉向俄罗斯科学院呈递了他的解，这个解被认为是现代图论的开篇之作。欧拉所做的最关键的一步就是将该城堡的地图抽象化。他先把河中的两个岛标记为A岛、B岛，把河岸两边标记为C岸、D岸；然后把岸和岛抽象为“点”，而将其相连的大桥抽象为“边”。如下图A所示，我们称为欧拉图。

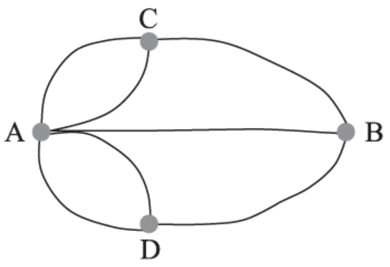


图　A

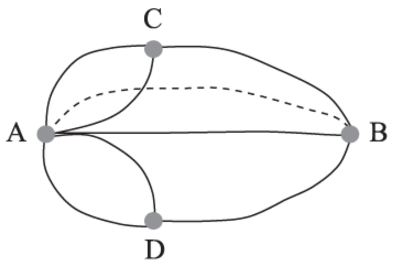


图　B

现在，你是否可以策划出一种可行方案，能够将每座桥穿过一次呢？用铅笔画一下吧。欧拉找到一种成功的步行方式，除起点和终点之外，每一次通过

一座桥走到一个岸上之后，都必须找到另一座没有走过的桥离开该岸。因此，和点相连的边必须是成对的。要想将所有的桥都遍历一次的话，除 2 个表示步行起点和终点的点之外，其他的点都必须有偶数条边与之相连。和某一点相连的边的数目，称之为“度”。例如，A 点的度数为 5。

欧 拉 定 理

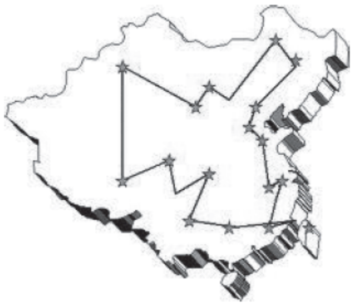
要想将城市中所有的桥都遍历一次的话，除最多 2 点外，其他所有点的度都必须为偶数。

而在这个七桥问题里，每一点的度数都是奇数。这就意味着将哥尼斯堡中的所有桥都只遍历一遍是不可能的，除非桥的设置有所变化。如果在 A 岛和 B 岛之间再建另一座桥，如上图 B 所示，那么 A 和 B 的度将变成偶数。这就意味着可以从 C 出发，将所有的桥遍历后在 D 结束。如果在 C 岸和 D 岸之间再建一座桥，那么就可以从任何一点出发，而且最终将回到该点。这是因为在这种情况之下，所有点的度都是偶数。

你在生活中是不是被问过，能否一笔画出某个图形或一笔写出某个字，现在你知道如何求解了吗？只要先把图形或字抽象成欧拉图，再计算每个顶点的度数，最后根据欧拉定理做出判断。

你一笔可以写出“中”字吗？

二、我应该先去哪里，再到哪儿？



李明是立白集团的一名超级推销员，立白集团是一家日化企业，主要销售洗涤用品，总部设在广州。他已经连续 3 年获得年度推销员奖章，这足以证明

他的能力。他负责的城市包括沈阳、南京、武汉、重庆，他每个月都要往返这些城市一次。摆在他面前的是如何制定旅行路线，使得旅行的总路程最短。

李明画出一张里程表，显示出城市之间的距离。例如，广州和沈阳之间的路程为 2 324 公里，这可以在下表中的广州和沈阳相交的格子里找到。

城市	广州	南京	武汉	重庆	沈阳
广州	0	1 373	1 069	1 357	2 324
南京	1 373	0	537	1 396	1 511
武汉	1 069	537	0	867	1 669
重庆	1 357	1 396	867	0	2 157
沈阳	2 324	1 511	1 669	2 157	0

作为一个经验丰富的推销员，李明制作了一张销售城市的草图，这张图并不是很精确，只要能告诉他这些城市的大概位置和它们之间的距离就可以了。他经常采取的一个路线是从广州出发，依次前往沈阳、武汉、重庆、南京，再回到广州。但是他意识到总路程为 7 629 公里（2 324+1 669+867+1 396+1 373），从里程数来讲，代价是非常高的，还有更好的路线吗？

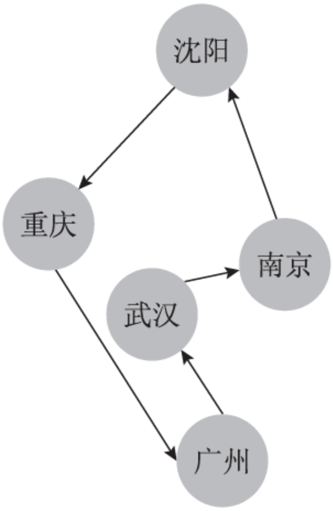
对于制订这样一个销售区域的旅行计划，我们需要记得，李明的职责并不是要制订一个详尽周密的旅行计划——而是前往那边推销产品。通过察看他在广州办公室里的一张地图，他发现离他最近的城市是武汉。广州到武汉的路程为 1 069 公里，相比之下，到南京的路程是 1 373 公里，到沈阳的路程是 2 324 公里，到重庆的路程是 1 357 公里。他还没有制订出一个完整的计划，便起身去了武汉。当他到达武汉并完成了那里的工作事务之后，他继续选择离它最近的城市作为下一个目的地。这次他选择了南京，因为南京和武汉之间的距离为 537 公里，比起其他两个城市更近一些。

达到南京之后，他经过的总路程为 1 069+537=1 606 公里。他接下来要在重庆和沈阳之间进行选择。因为重庆更近一些，所以他选择了先去重庆，再去沈阳，最后从沈阳回广州。因为从沈阳到广州的距离为 2 324 公里，是最长的一条线路，所以这个路线总长为 7 483 公里，只比之前的常规路线短了一点点。

这种思考方式通常称为寻找最短路径的“贪婪算法”。这是因为李明的决策总是局部的决策——他在某个城市时候总是寻找离他最近的城市作为下一个目的地。通过这种方式，他永远不需要考虑下一站外的路线，这种方法并不是战略最优，因为他没有考虑总体最优的路径，也许还有一个更短的路径。

李明发现，旅行只涉及 5 个城市，他可以好好利用这个便利。因为城市很少，所以他完全可以列出所有可能的路径，然后选出最短的一条。5 个城市总共可以有 24 条不同的路径，而他只需要检查其中的 12 条就可以了，因为每一条与它的相反路径是等长的。这种方法解决了李明的困惑，他发现最短路径是广州—武汉—南京—沈阳—重庆—广州。它的总路程为 6 631 公里（1 069+537+1 511+2 157+1 357）。

还好，李明只负责 5 个城市。如果增加到 13 个城市，需要检查的路径有 3.1×10^9 条。如果计算机 1 秒打印 1 条路径，需要几个世纪的时间才能把所有的路径打印出来。对于 100 个城市，则需要几千年的时间才能完成。



最短路线图

我们把李明遇到的问题称为“旅行推销员问题”，也称 TSP 问题（travelling salesman problem），是数学领域中的著名问题之一。

TSP 问题是一个组合优化问题。该问题可以被证明具有 NPC 计算复杂性。因此，任何能使该问题求解得以简化的方法，都将受到高度的评价和关注。虽然随着计算机运算速度的提高，已经有一些精确的方法可以处理 5 000 个城市

的问题。但一般采用非精确的方法给出一些路径，使它们有一定的概率成为最优路径。这样计算就简单得多。

可是，回到北京以后，李明意识到这个旅程花费的时间还是太长了，他想节省的并不是距离，而是时间。当关注的焦点是时间时，情况就有所不同了。因为在主航线上的飞行速度通常要比支航线上的飞行速度快，李明注意到广州飞往沈阳的直飞只要 3.5 小时。于是他画出了一张新的表格，标出了这些城市间的旅行时间。通过类似求距离最短路径的方式，他找出了时间花费最短的路径。同样地，李明下一步可以找出开销最少的路径。

你能否只用 4 条连续的线段把右图中的九个点都穿过？

三、只用四种颜色可以为地图着色吗？

1852 年，毕业于伦敦大学的弗南西斯•格思里 (Francis Guthrie) 来到一家科研单位搞地图着色工作时，发现了一种有趣的现象：“看来，每幅地图都可以用四种颜色着色，使得有共同边界的国家着上不同的颜色。”用数学语言表示，

即“将平面任意地细分为不相重叠的区域，每一个区域总可以用 1，2，3，4 这四个数字之一来标记，而不会使相邻的两个区域得到相同的数字”。这个结论能不能从数学上加以严格证明呢？他和在大学读书的弟弟格里斯决心试一试。兄弟二人为证明这一问题而使用的稿纸已经堆了一大叠，可是研究工作没有进展。

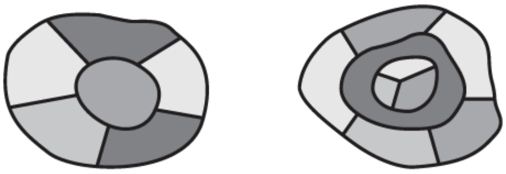
1852 年 10 月 23 日，他的弟弟就这个问题的证明请教他的老师——著名数学家德•摩尔根。摩尔根也没有能找到解决这个问题的途径，于是写信向自己的好友著名数学家哈密尔顿爵士请教。哈密尔顿接到摩尔根的信后，对四色

问题进行论证。但直到 1865 年哈密尔顿逝世为止，问题也没有能够解决。

1872 年，英国当时最著名的数学家凯利正式向伦敦数学学会提出了这个问题，于是四色猜想成了世界数学界关注的问题。世界上许多一流的数学家都纷纷参加了四色猜想的大会战。1878—1880 年，著名的律师兼数学家肯普和泰勒两人分别提交了证明四色猜想的论文，宣布证明了四色定理，大家都认为四色猜想从此也就解决了。

肯普

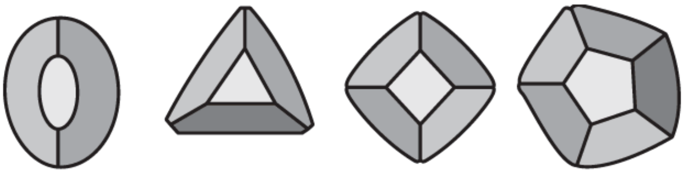
肯普的证明是这样的：首先指出如果没有一个国家包围其他国家，或没有三个以上的国家相遇于一点，这种地图就说是“正规的”（如下图左）。否则为非正规地图（如下图右）。一张地图往往是由正规地图和非正规地图联系在一起，但非正规地图所需颜色种数一般不超过正规地图所需的颜色，如果有一张需要五种颜色的地图，那就是指它的正规地图是五色的，要证明四色猜想成立，只要证明不存在一张正规五色地图就足够了。



肯普是用归谬法来证明的，大意是如果有一张正规的五色地图，就会存在一张国数最少的“极小正规五色地图”，如果极小正规五色地图中有一个国家的邻国数少于六个，就会存在一张国数较少的正规地图仍为五色的，这样一来就不会有极小五色地图的国数，也就不存在正规五色地图了。这样肯普就认为他已经证明了“四色问题”，但是后来人们发现他错了。不过肯普的证明阐明了两个重要的概念，对以后问题的解决提供了途径。

第一个概念是“构形”。他证明了在每一张正规地图中至少有一国具有两个、三个、四个或五个邻国，不存在每个国家都有六个或更多个邻国的正规地

图，也就是说，由两个邻国、三个邻国、四个或五个邻国组成的一组“构形”是不可避免的，每张地图至少含有下面这四种构形中的一个。



肯普提出的第二个概念是“可约”性。“可约”这个词的使用是来自肯普的论证。他证明了只要五色地图中有一国具有四个邻国，就会有国数减少的五色地图。自从引入“构形”“可约”概念后，逐步发展了检查“构形”以决定是否“可约”的一些标准方法，能够寻求“可约”“构形”的不可避免组，是证明“四色问题”的重要依据。但要证明大的构形可约，需要检查大量的细节，这是相当复杂的。

11 年后，即 1890 年，数学家赫伍德以自己的精确计算指出肯普的证明是错误的。不久，泰勒的证明也被人们否定了。后来，越来越多的数学家虽然对此绞尽脑汁，但一无所获。

进入 20 世纪以来，科学家们对四色猜想的证明基本上是按照肯普的想法在进行。1913 年，美国著名数学家、哈佛大学的伯克霍夫利用肯普的想法，结合自己新的设想；证明了某些大的构形可约。后来美国数学家富兰克林于 1939 年证明了 22 国以下的地图都可以用四色着色。1950 年，有人从 22 国推进到 35 国。1960 年，有人又证明了 39 国以下的地图可以只用四种颜色着色；随后又推进到了 50 国。看来这种推进仍然十分缓慢。

高速数字计算机的发明，促使更多数学家对“四色问题”的研究。从 1936 年就开始研究四色猜想的海克，公开宣称四色猜想可用寻找可约图形的不可避免组来证明。他的学生丢雷写了一个计算程序，海克不仅能用这程序产生的数据来证明构形可约，而且描绘可约构形的方法是从将地图改造成为数学上称为“对偶”图着手的。

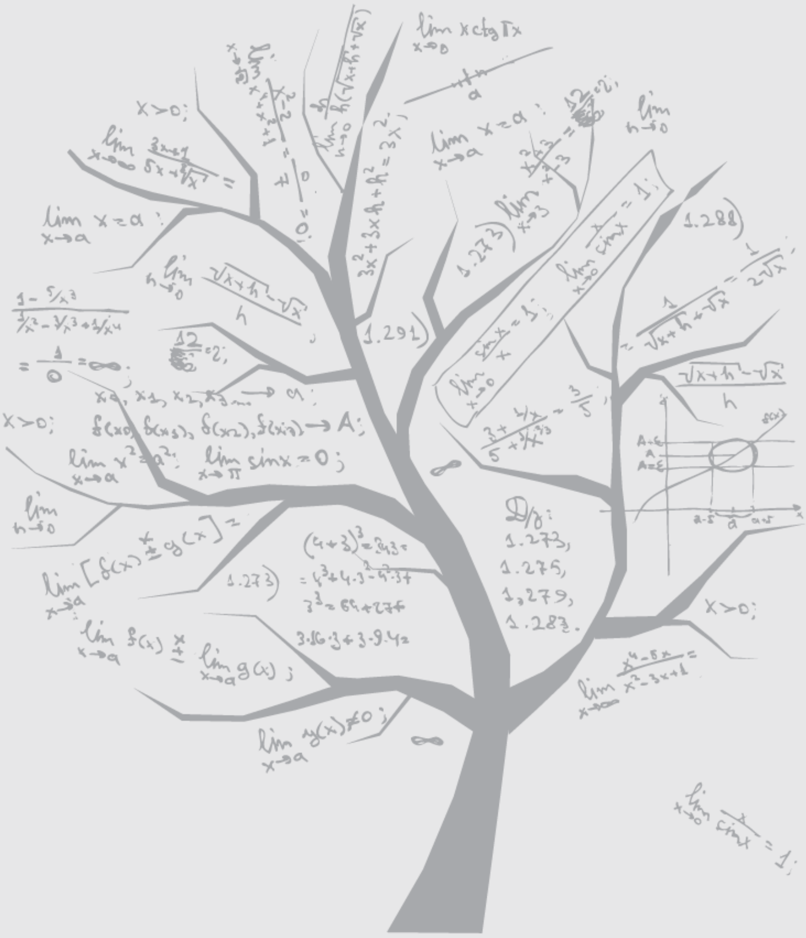
他把每个国家的首都标出来，然后把相邻国家的首都用一条越过边界的铁

路连接起来，除首都（称为顶点）及铁路（称为弧或边）外，擦掉其他所有的线，剩下的称为原图的对偶图。到了 20 世纪 60 年代后期，海克引进一个类似于在电网络中移动电荷的方法来求构形的不可避免组。在海克的研究中第一次以颇不成熟形式出现的“放电法”，对以后关于不可避免组的研究是个关键，也是证明四色定理的中心要素。

电子计算机问世以后，由于演算速度迅速提高，加之人机对话的出现，大大加快了对四色猜想证明的进程。美国伊利诺伊大学哈肯在 1970 年着手改进“放电过程”，后与阿佩尔合作编制了一个很好的程序。就在 1976 年 6 月，他们在美国伊利诺伊大学的两台不同的电子计算机上，用了 1 200 个小时，作了 100 亿次判断，终于完成了四色定理的证明，轰动了世界。

这是一百多年来吸引许多数学家与数学爱好者的大事，当两位数学家将他们的研究成果发表的时候，当地的邮局在当天发出的所有邮件上都加盖了“四色问题”的特制邮戳，以庆祝这一难题获得解决。

“四色问题”的证明不仅解决了一个历时 100 多年的难题，而且成为数学史上一系列新思维的起点。在“四色问题”的研究过程中，不少新的数学理论随之产生，也发展了很多数学计算技巧。如将地图的着色问题化为图论问题，丰富了图论的内容。不仅如此，“四色问题”在有效设计航空班机日程表、设计计算机编码程序上都起到了推动作用。 不过不少数学家并不满足于计算机取得的成就，他们认为应该有一种简捷明快的书面证明方法。直到现在，仍有不少数学家和数学爱好者在寻找更简洁的证明方法。



第四章

数学之美

数学本身就是一门艺术，艺术的美是与数学分不开的。美学家笛卡儿认为艺术中美的“数学关系”来自直观的感受，是理性知识，是最简单、最精确而又不证自明的真理。

第一节　美的奥秘——0.618

公元前约 300 年，欧几里得写出集大成的《几何原本》（*Elements*），这部综合论著建立在巴比伦人及其追随者毕达哥斯拉的数学基础上。在第 6 卷中，欧几里得解释道：“一条线段被分割时，若整条线段与分隔后的长线段的比等于长线段与短线段的比，则称这条线段以‘中外比’分隔。”让我们从数学角度看一下这段话。下图画出了一条被分成两部分的线段，其长度是 A 和 B，且 $B>A$，则线的总长度为 $A+B$，欧几里得认为如果 $A+B$ 与 B 的比等于 B 和 A 的比，则该线段以“中外比”分割。

注意此时有 $\dfrac{B}{A}=\dfrac{A+B}{B}=1+\dfrac{A}{B}=1+\left(\dfrac{B}{A}\right)^{-1}$

将方程两边乘以$\dfrac{B}{A}$，可以看出$\dfrac{B}{A}$是多项式 x^2-x-1 的根，由于$\dfrac{B}{A}$是正数，可得

$$\frac{B}{A}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}=1.618\ 033\ 989\cdots$$

在现在的术语中，这样的分割是黄金分割 (Golden Section)，$\dfrac{B}{A}$称为黄金分割率（也被称为神圣比率），它是一个数学常数，一般以希腊字母 Φ 表示，这是对伟大的希腊雕塑家菲迪亚斯的纪念，据说他使用了黄金分割率。

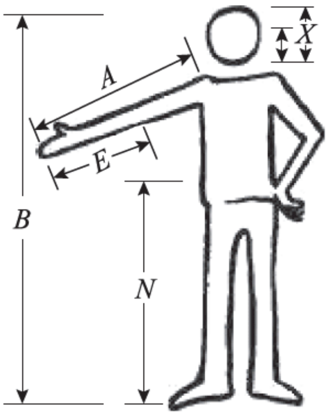
黄金分割也可理解为“较大部分与整体部分的比值等于较小部分与较大部分的比值”，其比值是一个无理数，约为 0.618，应用时一般取 0.618 ，就像圆周率在应用时取 3.14 一样。黄金分割具有严格的比例性、艺术性、和谐性，蕴藏着丰富的美学价值，而且呈现于不少动物和植物的外观。现今黄金分割应用在很多工业产品、电子产品、建筑物或艺术品，展现其功能性与美观性。

你能用直尺和圆规画出一个黄金矩形（长宽比为黄金分割比）吗?

一、“窈窕淑女”与“三庭五眼”

人类研究发现，人体其实是世界上最美的物体之一。德国美学家泽辛对人体做了大量的计算，发现人体的黄金分割点竟然有四处，即为肚脐、咽喉、膝关节和肘关节。就人体的整体结构而言，从脚底往上量，人整体身高的 0.618 处正好在肚脐附近。肚脐以下与一个人整体身高的比为0.618 : 1，就构成了黄金分割，这样的比例会给人以舒服、优美的感觉。

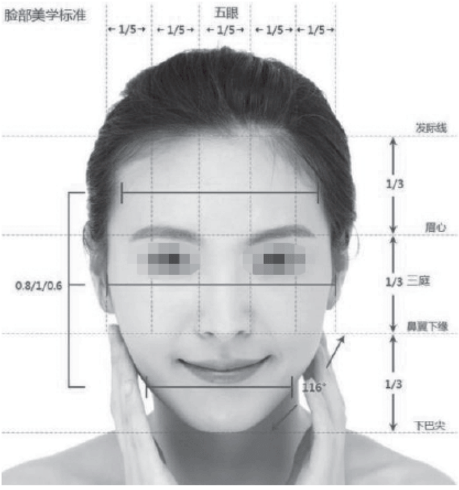
除此之外，人体上还存在 3 处黄金分割。第一处是咽喉，是肚脐以上部分的黄金分割点。咽喉至头顶与咽喉至肚脐长度的比为 0.618 : 1。第二处是膝盖，是肚脐以下部分的黄金分割点，膝盖至脚后跟与肚脐至膝盖长度的比为 0.618 : 1；第三处是肘关节，其是上肢部分的黄金分割点，肩关节至肘关节与肘关节至中指指尖长度的比也为 0.618 : 1。如果一个人这四处结构的比例都符合黄金分割律，那么这个人的身体比例看起来就



是最优美的。除此之外，人体上还有很多细微之处都能看到黄金分割的身影，这是经过长时间的自然选择而形成的最适合人类生存的比例。

人的生命体征中也有许多符合黄金分割的现象。人类的消化道长 9 米，其 0.618 为 5.5 米，是承担消化吸收任务的小肠的长度。

“三庭五眼”的“瓜子脸、鹅蛋脸”是世界各国均认为最美的脸型，从标准脸型的美学标准来看，面部长度与宽度的比例为 1.618∶1，符合黄金比例。



最漂亮的脸庞：
眉毛到脖子的距离 / 头顶到脖子的距离 =0.618

我国用“三庭五眼”作为五官与脸型相搭配的美学标准。

三庭：指脸的长度比例，把脸的长度分为三个等分，从前额发际线至眉骨，从眉骨至鼻底，从鼻底至下颏，各占脸长的 1/3。

五眼：指脸的宽度比例，以眼形长度为单位，把脸的宽度分成五个等分，从左侧发际至右侧发际，为五只眼形。两只眼睛之间有一只眼睛的间距，两眼外侧至侧发际各为一只眼睛的间距，各占比例的 1/5。

二、无处不在的黄金比例

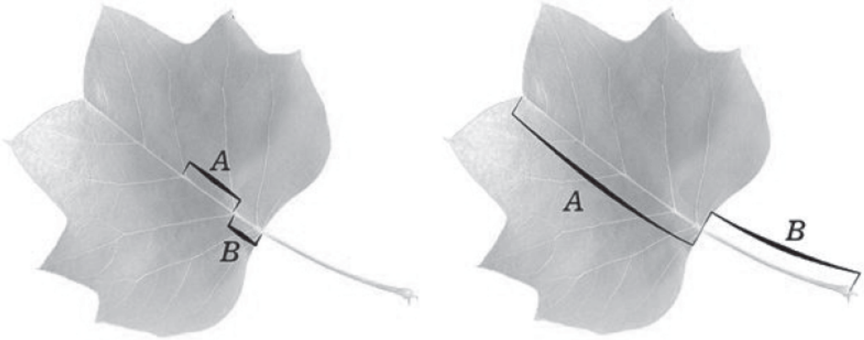
黄金比例在生活中的应用非常广泛，如一年有 12 个月，12 乘以 0.618 近似等于 7.4，在 7—8 月，人体血液中淋巴细胞最多，能生成大量抵抗各种微生物的淋巴因子，因此，这时人的免疫力最强，较少得病。在有利于后代成长的角度看，在这个时期最适宜孕育新生命，因此 7—8 月也是婚配的最佳时期。

人体的正常体温是 36 ℃ ～ 37 ℃，这个体温与 0.618 的乘积恰好是 22.4℃～ 22.8℃，这也是为什么人在环境气温 22℃～ 24℃下生活感到最适宜。而且在这一环境温度中，人体的生理功能、生活节奏等新陈代谢水平均处于最佳状态。

再如，舞台上的报幕员并不是站在舞台的正中央，而是偏在台上一侧，以站在舞台长度的黄金分割点的位置最美观，声音传播的效果最好。

中华人民共和国的国旗是矩形，长与宽的比例是 3∶2，这个比值与黄金比例也很相近，而且国旗上的五角星的每条边也都是按黄金比例进行划分的。

养生学家通过多年观察发现，动和静是一个 0.618 比例关系，大致四分动六分静才是较佳养生之法。医学专家分析后发现，人的脑电波图，当高低频率的比为 1∶0.618 时，是身心最感快乐欢愉的时刻。

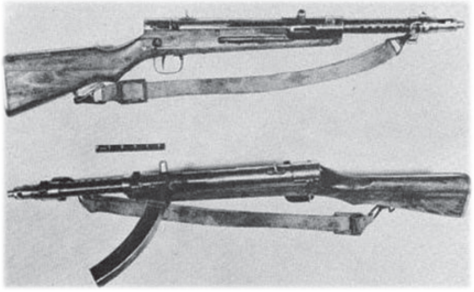


就连植物界的叶片的茎叶也是按照黄金比例的规律排列着的。

三、军事中的 0.618

也许，0.618 在科学艺术上的表现我们已了解了很多，但是，你有没有听说过，0.618 还与炮火连天、硝烟弥漫、血肉横飞的战场有着不解之缘。

➢ 0.618 与武器装备



在冷兵器时代，人们还不知道黄金分割率这个概念，但在制造宝剑、大刀、长矛等武器时，黄金分割率的法则已处处体现。实际上，从锋利的马刀刃口的弧度，到子弹、炮弹、弹道导弹沿弹道飞行的顶点；从飞

机进入俯冲轰炸状态的最佳投弹高度和角度，到坦克外壳设计时的最佳避弹坡度，黄金分割率无处不在。

相传，在发射子弹的步枪刚刚制造出来的时候，它的枪把和枪身的长度比例很不科学合理，也不方便于抓握和瞄准。到了 1918 年，一个名叫阿尔文 • 约克的美国远征军下士，对这种步枪进行了改造，改进后的枪型枪身和枪把的比例恰恰符合 0.618 的比例。

➢ 0.618 与战争

在历史上发生的战争中，很多都遵循着 0.618 的规律。

数百年来，人们对成吉思汗的蒙古骑兵，为什么能像飓风扫落叶般地席卷欧亚大陆颇感费解。蒙古骑兵的战斗队形与西方传统的方阵大不相同，在它的 5 排制阵形中，人盔马甲的重骑兵和快捷灵动轻骑兵的比例为 2 : 3，这就是一个黄金分割！你不能不佩服那位马背军事家的天才妙悟。

再看西方，以海湾战争为例。战前，据军事专家估计，如果共和国卫队的装备和人员，经空中轰炸损失达到或超过 30%，就将基本丧失战斗力。为了使伊军的损耗达到这个临界点，美英联军一再延长轰炸时间，持续 38 天，直到摧毁了伊拉克在战区内 428 辆坦克中的 38%、2 280 辆装甲车中的 32%、3 100 门火炮中的 47%，这时伊军实力下降至 60% 左右，这正是军队丧失战斗力的临界点。也就是将伊拉克军事力量削弱到黄金分割点上后，美英

联军才抽出“沙漠军刀”砍向萨达姆，在地面作战只用了 100 个小时就达到了战争目的。

第二节　建筑的数学之美

大约一万年前，人类从通过采集和打猎获得食物逐渐变为种植庄稼和驯养动物，慢慢地离开洞穴，开始建造原始住所，为了安全，他们聚集在村庄内，并通过使用绳索和棍棒，画出直线和圆。人们造谷仓、发明轮子和轴，并制造车辆。这些早期的设计、建筑和造型工作培养了人类对平面和空间关系的感觉。人们兴建灌溉工程，不断促进科技的发展，数学的实践就此展开。那时的数学还是一种基础数学，几乎没有符号，也不能用公式表示通用的方法。数学被用于计算基本面积和体积，作为一种解决特定实际问题的工具。

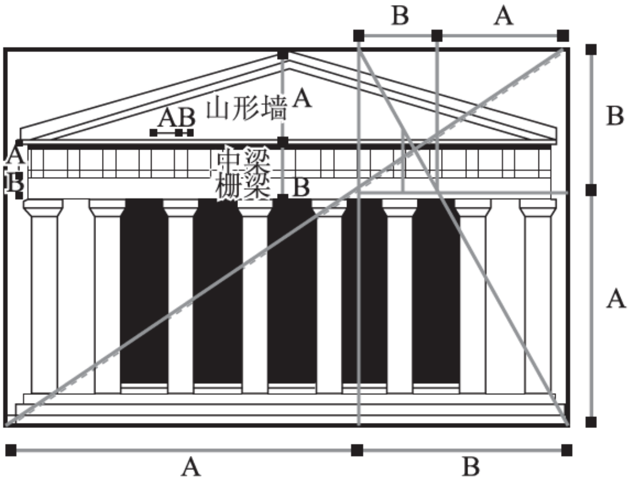
一、帕特农神庙与黄金分割

人们公认的一种美的数比当推“ 黄金分割”。黄金分割显示出了事物的匀称美，是建筑结构美的一个形式要素。古埃及的金字塔，印度的泰姬陵，法国的巴黎圣母院和中国的承德避暑山庄烟雨楼等都与黄金分割有着不解之缘。

以古希腊建筑家菲迪亚斯设计的帕特农神庙为例，它是世界上唯一被誉为至高无上而没有争议的古建筑，也是古希腊众多庙宇建筑中最伟大、最精巧的杰作。那无与伦比的数学整数式柱列，那完美超群的黄金分割式立面，对欧洲乃至全世界的建筑都产生了巨大的影响。

帕特农神庙包含两种柱式系列，它们都明显地体现出了优美的几何规则， 也是永不凋谢的艺术精品。由这些柱列所构成的比例极端匀称的帕特农

神庙已成为世界性的研究课题。一些专家认为，神庙之所以如此壮丽和谐，是因为它的高、宽、柱间距等都符合黄金分割律所画出的特定的几何图形，而由这些特定的几何图形建造出来的建筑总是美的。那巍然屹立的大理石柱廊，不仅以黄金比分割了整个庙宇，而且使柱廊高与整个神殿高之比也为黄金数，从而使神庙上下、前后比例浑然一体。



帕特农神庙

上海的东方明珠广播电视塔，塔身高达 468 米。为了美化塔身，设计师巧妙地在上面装置了晶莹耀眼的上球体、下球体和太空舱，既可供游人登高俯瞰地面景色，又使笔直的塔身有了曲线变化。更妙的是，上球体所选的位置在塔身总高度 5 : 8 的地方，即从上球体到塔顶的距离，同上球体到地面的距离大约是 5 : 8，这一符合黄金分割之比的安排，使得塔体挺拔秀美，极具审美效果。

东方明珠广播电视塔

二、几何图形在建筑中的运用

在尼罗河三角洲南面的埃及，错落有致地散布着八十多座金字塔，这是奴隶制帝王——法老的陵墓。这些金字塔大约建于公元前二千五百年。尽管当时的人们还没有完整的数学知识，但却给后人留下了许多神奇的故事。

第四王朝的 3 位皇帝胡夫、海夫拉和门卡乌拉在尼罗河三角洲的吉萨（在今开罗近郊），造了一个金字塔群，主要由胡夫金字塔、哈夫拉金字塔、孟卡拉金字塔及大狮身人面像组成，周围还有许多“玛斯塔巴”与小金字塔。其中胡夫金字塔是古埃及金字塔最成熟的代表，被后世的人们称为“大金字塔”。

金字塔群是古埃及文明的代表作，据说是古埃及法老的陵寝，它建造于沙漠之中，结构精巧，外形宏伟，是古埃及的象征。它们分布在尼罗河两岸、古上埃及和下埃及、今苏丹和埃及境内。据古希腊历史学家希罗多德的估算，修建胡夫金字塔一共用了 20 年时间，每年用工 10 万人。金字塔一方面体现了古埃及人民的智慧；另一方面也成为了法老专制统治的见证。

希罗多德：公元前 5 世纪（约前 480—前 425 年）的古希腊作家、历史学家，他把旅行中的所闻所见，以及第一波斯帝国的历史记录下来，著成《历史》一书，成为西方文学史上第一部完整流传下来的散文作品，希罗多德也因此被尊称为“历史之父”。

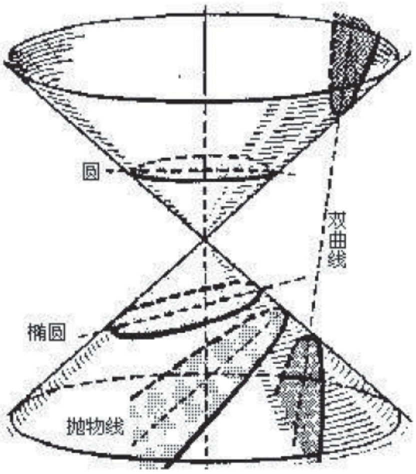
胡夫金字塔几何尺寸十分精确，其 4 个面正对着东、南、西、北四方，误差不超过圆弧的 3 分，底边原长 230 米，由于塔外层石灰石脱落，现在底边

胡夫金字塔

减短为 227 米，倾角为 51 度 51 分。塔原高 146.59 米，因顶端剥落，现高 136.5 米，相当于一座 40 层摩天大楼，塔底面呈正方形，其高度乘以 10^9 等于地球到太阳的距离，乘以 4 200 恰好等于北极极点到赤道平面的距离，其周长乘以 43 200 恰好等于地球赤道的周长。

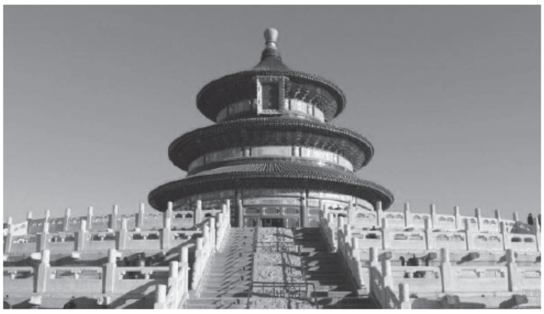
英国《伦敦观察家报》有一位编辑名叫约翰·泰勒，他是天文学和数学的业余爱好者。他曾根据文献资料中提供的数据对大金字塔进行了研究。他首先注意到胡夫大金字塔底角不是 60°，而是 51°51′，从而发现每壁三角形的面积等于其高度的平方。另外，塔高与塔基周长的比就是地球半径与周长之比，因此，用塔高来除底边的 2 倍，即可求得圆周率 π=3.141 59。泰勒认为这个比例绝不是偶然的，它证明了古埃及人已经知道地球是圆形的，还知道地球半径与周长之比。

此外，圆锥曲线是用一个不过圆锥面顶点的平面截这个圆锥面所得到的曲线，一般有圆、椭圆、双曲线和抛物线之分。圆锥曲线的表现性就存在于其本身的结构之中。分析曲线本身的特有结构，有助于了解审美主体在欣赏建筑美时所造成的不同审美感受。



圆之所以被认为是平面图形中最美的，是因为圆具有完全转动的对称性，显示出一种绝对的对称与和谐，使整体与部分显得十分协调。这种过于强的对称性使圆形具有一种不变的曲率，而这种不变的曲率又由圆形仅有的一种结构条件所决定，即“圆形轨道上的所有点离中心点的距离相等”。显然，这种图形使我们感到完美无缺、稳定凝重。

北京的天坛，是我国古代建筑的典型代表，因为其恰当地运用了圆形来体现人们对天象季节关系的认识和伦理观念。它是古代人“天圆地方”宇宙观的直接反映，是人们盼望“风调雨顺、国泰民安”的一种精神寄托。进入天坛，仿佛来到了一个圆的世界。


北京天坛

天坛中的主要建筑，圜丘坛、皇穹宇和祈年殿，均为圆形平面。祈年殿与圜丘坛间的隔墙为一半圆，甚至连内外围墙的北面也建成圆弧状。祈年殿和皇穹宇，都是圆顶殿宇。祈年殿不仅外部的台基圆、平面圆，而且内部的构件和装饰彩绘也都是圆形的，殿顶还有圆球一个。可见，圆形在天坛主要建筑的构图中占有主导地位，是整个建筑群和谐统一的重要因素。

观看过由米开朗琪罗设计的圣彼得大教堂的人，无不被这座把庞大的体积与自由上升的运动微妙结合的艺术品所折服。通过分析，这种表现效果的产生依赖于椭圆形所具有的固有特征，如构成圆顶外围的两个组成部分是从同一个圆形中截取下来的，因此，它们都具有圆形曲线所特有的稳固性。

但是，这两部分曲线又是从较大的圆形中截取的，使得圆心位置偏离。这样的两个部分连接在一起就不会形成一个半圆。在交接处出现的一个尖点，在哥特式建筑中是任其暴露的，而米开朗琪罗设计的这一拱顶，却是隐蔽的，它被一层顶棚所遮盖。

这样一来，不但丰富了外部的几何结构层次，而且使左右两部分曲线看上去好像连在一起，但又不像同一个半圆那样显得僵硬。

圣彼得大教堂

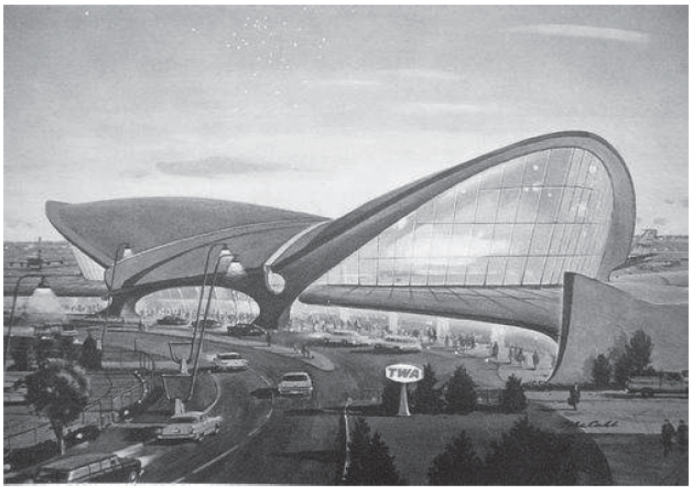
由于左右两部分的连结体现了两种不同曲率之间的合解而具有一种椭圆性质，所以显得特别柔和优美，但又不完全具有椭圆的特征而仍透露出了圆形曲线所特有的稳固性。整个拱顶也由于突破了圆形的封闭性给人以向上伸展的运动感。

三、抽象数学与建筑

抽象数学是相对于古典数学而言的，它是以向量、矩阵等代表数来研究数的运算规律和性质的学科。抽象数学的分支众多，如群论、拓扑学等。建筑中的装饰艺术的美与数学中的群论联系密切。即便是在遥远的古代，虽然还没有数学中的“群”的观念，但对称性以及对称花样已散见于各民族的装饰艺术之中。例如，在1924年由数学家波尔亚证明平面上共有十七种对称图样之前，西班牙的阿尔汗布拉宫的装饰已经一个不少地绘制出了这十七种不同的图样。这一例子说明了数学与建筑之间有着一种微妙的关系，不仅数学增添了建筑的美，而且建筑也增添了数学的美。

拓扑学是研究拓扑变换（一对一的连续变换）下图形的不变性和不变量的学科。素描抽象艺术的建筑与拓扑学也是不无关系的。近年来，建筑界有一种追求“应物象形”的趋势，这是一种雷同于文艺复兴时期富有人情味的艺术风格。例如，美国田纳西州的吉他形音乐博物馆，纽约航空港展翅欲飞的鸟形候机楼等都是别有风味的象形建筑。这类建筑因其结构上的复杂性而增加了技术上的困难性。在这类建筑中，数学功能的显示除了复杂数学计算外，运用拓扑变换也是一个十分重要的手段。建筑师只有在拓扑变换这个内在的心理意识指挥下，才有利于对象形模式进行宏观控制，达到形似和神似有机结合的审美效果。

在一定程度上，建筑就是数学的物质化表达。建筑设计之美是一种形式美，而恰当的比例在形式美中具有独特的魅力和作用。柏拉图认为“美就是恰当”，笛卡儿也认为“美是一种恰到好处的协调与适中”。



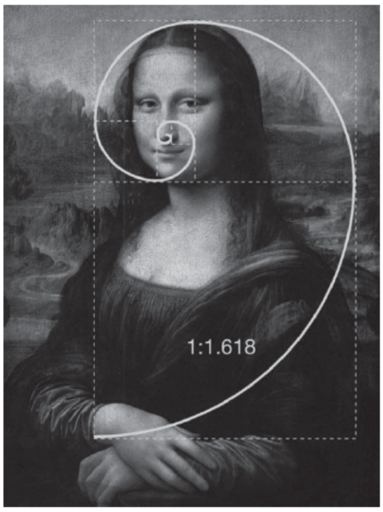
大鸟状纽约肯尼迪机场候机楼

“人类是按照美的规律改造世界的”。尽管不同时期人们的审美标准有所不同，但对美与数学的密切关系却是公认的。人们认为探求比例的和谐、形状的雅致与人们欣赏美、追求美的活动始终紧密相关。

第三节　艺术的数学之美

一、绘画与数学

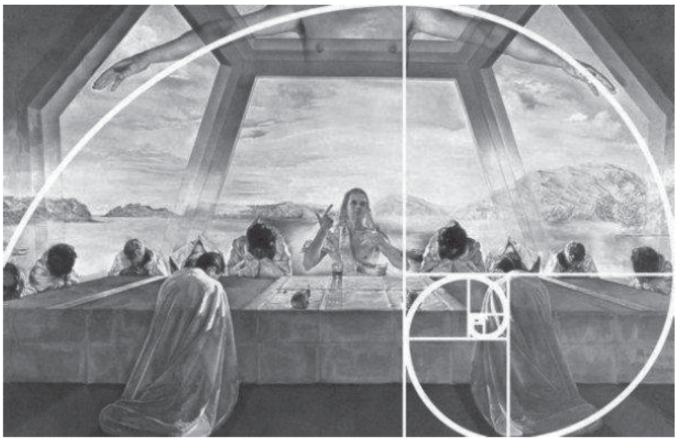
《蒙娜丽莎》是意大利文艺复兴时代著名画家达·芬奇的肖像画作品。画中的主人公是当时的新贵乔孔多的年轻妻子蒙娜丽莎，创作这幅画用了4年时间。那时，蒙娜丽莎的幼子刚刚夭折，她一直处于哀痛之中。为了让女主人高兴起来，达·芬奇在作画时请来音乐家和喜剧演员，想尽办法让蒙娜丽莎高兴起来。



《蒙娜丽莎的微笑》

这幅画完成后，端庄美丽的蒙娜丽莎脸上那神秘的微笑使无数人为之倾倒。人们对那微笑进行了种种猜测：是和蔼可亲温婉的微笑？是多愁善感感伤的微笑？还是内在快乐的标志？那微笑仿佛包括这一切，又仿佛都不是。它的迷人之处，全在于那微笑的神秘莫测。

达•芬奇的另一幅名画《最后的晚餐》也以精准的透视关系、对人物细致入微的刻画及卓越的构图被世人赞赏。下图显示了画面中的各种黄金比例关系，正是这些严格的黄金分割赋予了画面和谐的视觉效果。耶稣位于画面正中，即透视中心点；画面左侧的犹大，处于画面三次分割的黄金分割线上，那只拿着钱袋的手，也处于黄金分割线上。通过这样的构图和对人物位置的安排，即使没有那只钱袋和那副惊恐的表情，也可以清楚地知道画面中谁是犹大。精心的人物构图和精细的绘画能带给观者身临其境之感。



《最后的晚餐》

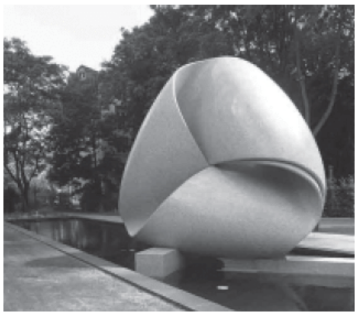
达•芬奇是一位思想深邃，学识渊博、多才多艺的画家、天文学家、发明家、建筑工程师。他还擅长雕塑、音乐、发明、建筑，通晓数学、生理、物理、天文、地质等学科，既多才多艺，又勤奋多产，保存下来的手稿大约有6 000页。他全部的科研成果尽数保存在他的手稿中，爱因斯坦认为，达•芬奇的科研成果如果在当时就发表的话，科技可以提前30～50年。

黄金比例是人类的一个伟大发现。这个广泛存在于自然界的比例关系，对艺术设计具有重要的指导意义。虽然“美”是一个无比复杂且难以定义的概念，但具有黄金比例的设计构图显然更符合大众的审美心理，因而更容易被接受。黄金分割法真正应用于艺术设计领域的时间并不长，如何合理利用黄金分割法以增强艺术设计的视觉美感，仍然是一个值得深入研究的问题。

“黄金分割”的简化版为“三分法则”，其基本目的就是避免对称式构图，对称式构图通常把被摄物置于画面中央，这往往令人生厌。用“三分法则”可以把画面划分成分别占 1/3 和 2/3 面积的两个区域，如右图所示。

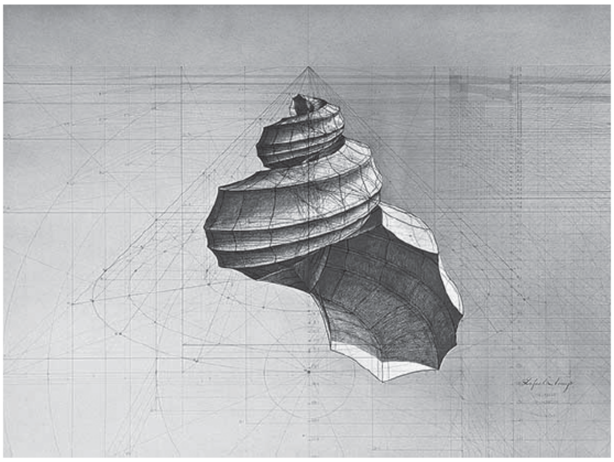
二、设计与数学

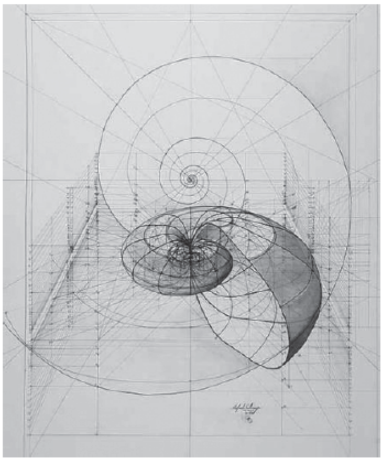
20 世纪以来，越来越多的人开始着迷于艺术与数学的关系。曾是包豪斯高才生的马克思·比尔（Max Bill，1908—1994）相信：“数学规律是艺术的一种必要援助，只有通过数学规律，艺术家纯粹的心理世界才能最终获得恰当的形式外衣。”因此，马克思·比尔对于数学的偏爱就十分清晰地出现在了他的创作中——不论是大量应用几何元素的平面设计，还是从莫比乌斯环得到灵感而创作的雕塑。



马克思·比尔的作品

委内瑞拉艺术家 Rafael Araujo 将数学计算融于自己的绘画创作之中，解释自然、数学与艺术之间的关系。





by Rafael Araujo

荷兰艺术家埃舍尔（M. C. Escher，1898—1972）是数学艺术发展历程中相当重要的一位。他的作品多以平面镶嵌、不可能的空间、悖论、循环等作为主题，在其中可以看到对分形、对称、双曲几何、多面体、拓扑学等数学概念的形象表达。直至今日，不仅很多艺术爱好者，而且很多数学爱好者也对这位科学思维大师的作品称赞有加。

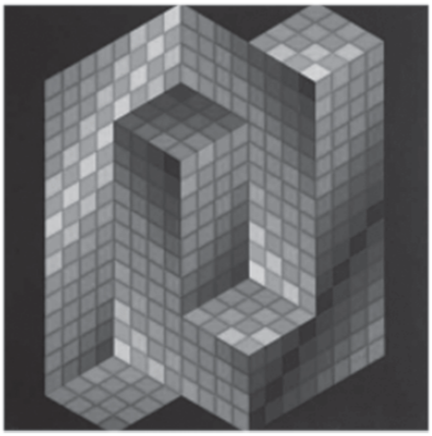
By M. C. Escher

在奥地利艺术家莫塞尔（Koloman Moser，1868—1918）的作品中，我们可以看到相似的应用。尽管莫塞尔的作品洋溢着新艺术主义运动的色彩，但它

们与几何数学的联系清晰可见。

by Koloman Moser

匈牙利艺术家维克托·瓦萨雷里（Victor Wasarely，1908—1997）将对几何的应用拓展到了视觉错觉的范围。作为欧普艺术的奠基人，他所创造出的空间，具有闪烁和流动的效果。



by Victor Wasarely

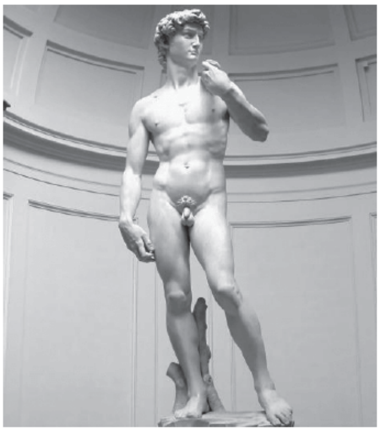
三、雕塑与数学

“我不是一个梦幻者，而是一个数学家，我的雕塑之所以好，就因为它来自于几何学。在我看来，平面和体积是所有生命与美的法则。”

——罗丹

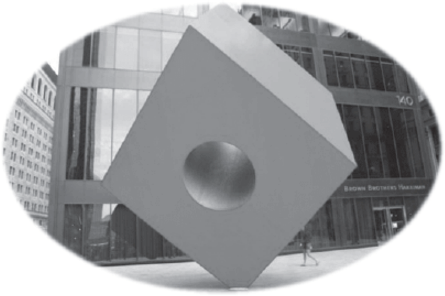
➢ 古典雕塑——数学美的形象“代言人”

维、空间、重心、对称、几何对象和补集都是雕塑家在进行创作时运用的数学概念。由此可见，空间在雕塑家的工作中起着显著的作用。有些作品占有空间的方式和人类以及其他生物一模一样。在这些作品中，重心一般都处在雕塑品内部的一点。这些雕塑品固定在地面上，它们占有空间的方式是人类感到舒服或习惯的。例如，米开朗琪罗的《大卫》、古希腊艺术家米隆的《掷铁饼者》和贝尼亚米诺·布法诺的《马背上的圣弗朗西斯》。



雕塑《大卫》

雕塑作为在空间中诞生的数学，有时能在视觉上让人产生错觉，有些作品看起来甚至是对重力的否定。这些作品中就包括亚历山大·考尔德的汽车雕塑，它们的平衡和对称是相当精巧的。野口勇《红立方》中在顶点处的平衡有些不可思议。



雕塑《红立方》

雕塑《维纳斯》

传说维纳斯是众神之父宙斯和海洋女神狄俄涅的女儿。维纳斯在古希腊神话中原为丰收女神。

1820 年，在古希腊爱琴海米罗斯岛上一个山洞里，当地一个农民发现了一尊雕像，当他小心地把雕像挖掘出来时，发现她已失去了两条手臂，因此后来被称为“断臂维纳斯”。雕像高约 2.4 米，通体由一块半透明的白云石雕塑，站在鸡血白纹的云石底座上，是迄今被发现的古希腊

女性雕像中最美的一尊。

她的身长比接近人体美标准，身与头之比为 8 : 1 可分割成 0.382 : 0.618 : 1，这就是“黄金分割率”。这正是古人对于人体美的赞颂和肯定，为后世的艺术树立了不朽的典范。

古希腊神的形象，是按照人的裸体比例美学来塑造的。虽然古代人崇拜神，但由于雕塑家是按照现实生活中人体美去创造美的形象的，因而这些完美的雕像的各部分比例几乎都蕴含 5 : 8 的黄金分割。

➢ 现代雕塑——数学方程式的艺术

随着科学技术的进步，雕塑的艺术形式也得以朝着更好、更开放的方向发展。如今数学模型可以兼用作艺术模型，在这些模型中，有立方体、多立方体、球形、环面、三叶形纽结、多面体、半球、纽结、正方形、圆、三角形、角锥体、角柱体等。雕塑家们依靠数学思想来扩充艺术的例子不胜枚举。托尼 • 罗宾利用对第四维几何和计算机科学的研究来发展和扩充他的艺术。

罗纳德 • 戴尔 • 雷什在创作《复活节彩蛋》巨型雕塑时，不得不用直观、独创性、数学、计算机加上他的手来完成它。艺术家兼数学家的赫拉曼 • R.P. 弗格森运用传统雕塑、计算机和数学方程创造出《野球》和《带有十字形帽和向量场的克莱茵瓶》这样的神奇作品。

雕塑《复活节彩蛋》

艺术家构想中的作品往往需要通过数学的计算与测量对其物理性质重新进行理性的理解和认识，才能成为现实中可能合理存在的作品。伦纳多 • 达 • 芬奇的大多数作品都是先经过数学分析然后进行创作的。他曾说过：“能够真正欣赏我作品的人，没有一个不是数学家。那些不相信数学是极其精确科学的人，

是昏庸之辈，他们不可能澄清而只能日益加深诡辩中的矛盾。”如果埃舍尔没有从数学上对镶嵌图案思想和视错觉进行分析并了解它们的数学内容，他就不能自在地进行创作。而欧几里得几何和拓扑学中的数学对象曾经在野口勇、戴维·史密斯、亨利·穆尔等艺术家的雕塑中起过重要的作用。

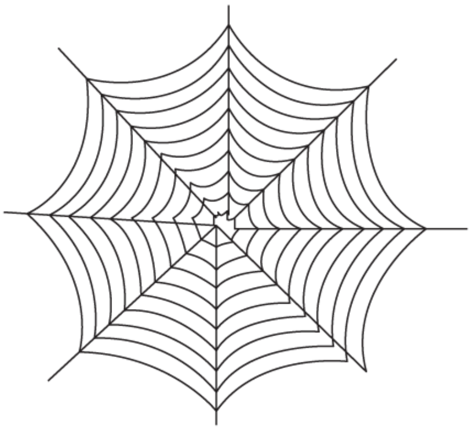
第四节　自然界的数学之美

人们往往认为数学知识只是人类的专利，其实自然界才是数学的源泉。你有没有观察过一片叶子，它为什么能精确地分成左右两半？你有没有注意到各种花的花瓣数量和形状？有没有注意到某种贝壳和松果的螺旋形生长模式？同样地，许多动物也“精通数学”。

一、“天才设计师”

工蜂建造的蜂巢十分奇妙，它是严格的六角柱形体。它的一端是六角形开口，另一端则是封闭的六角棱锥体的底，由三个相同的菱形组成。18 世纪初，法国学者马拉尔奇曾经专门测量过大量蜂巢的尺寸，令他感到十分惊讶的是，这些蜂巢组成底盘的菱形的所有钝角都是 109° 28′，所有的锐角都是 70° 32′。后来经过法国数学家克尼格和苏格兰数学家马克洛林从理论上的计算发现，如果要消耗最少的材料，制成最大的菱形容器正是这个角度。

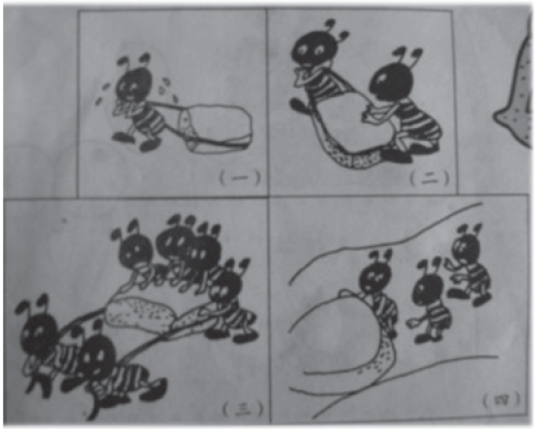
蜘蛛结的“八卦”网，既复杂又非常美丽，这种八角形的几何图案，即使木工师傅用直尺和圆规也难以画得如蜘蛛网那样匀称。当对这个美丽的结构用数学方法进行分析时，出现在蜘蛛网上的数学概念真是多得惊人——半径、弦、平行线段、三角形、全等对应角、对数螺线、悬链线和超越线。



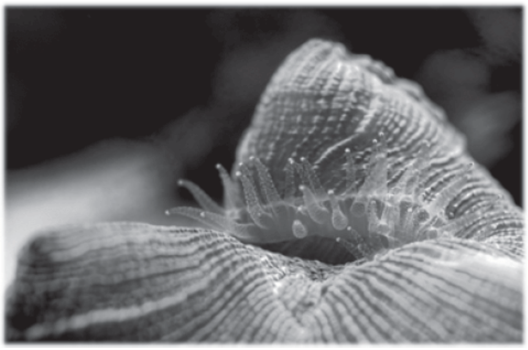
产于我国的珍稀动物丹顶鹤总是成群结队地迁徙，而且排成“人”字形。这“人”字形的角度永远是110°左右，如果计算得更精确些，“人”字夹角的一半，即每边与丹顶鹤群前进方向的夹角为54°44′08″，而世界上最坚硬的金刚石晶体的角度也恰好是这个度数。这是巧合还是某种大自然的“契合”呢？

二、“精算师”

每天上午，当太阳升起与地平线成30°角时，蜜蜂中的“侦察员”就会肩负重托去侦察蜜源。回来后，用其特有的“舞蹈语言”向伙伴们报告花蜜的方位、距离和数量，于是蜂王便派工蜂去采蜜。令人称奇的是，它们的计算能力非常之强，派出去的工蜂不多不少，恰好都能吃饱，从而保证回巢酿蜜。



蚂蚁的计算本领也十分高超。英国科学家亨斯顿做过一个有趣的实验。他把一只死蚱蜢切成三块，第二块比第一块大一倍，第三块比第二块大一倍。在蚁群发现这三块食物 40 分钟后，聚集在最小一块蚱蜢处的蚂蚁有 28 只，第二块附近的有 44 只，第三块附近的有 89 只，后一组差不多都较前一组多一倍。看来蚂蚁的乘、除法算得相当不错。



珊瑚虫则在另一个方面展示出自己过人的数学天赋，它能在自己身上奇妙地记下“日历”：每年在自己的体壁上“刻画”出 365 条环形纹，显然是一天“画”一条。一些古生物学家发现，3.5 亿年前的珊瑚虫每年所“画”出的环形纹是 400 条。天文学家告诉我们，当时地球上的一天只有 21.9 小时，也就是说，当时的一年不是 365 天，而是 400 天。可见珊瑚虫能根据天象的变化来“计算”并“记载”一年的时间，其结果还相当准确。

三、花瓣与数列

百合花

斐波那契数列：1、1、2、3、5、8、13、21、…。它因数学家列昂纳多·斐波那契以兔子繁殖为例而引入，故又称为“兔子数列”。除动物之外，许多植物的花瓣也与斐波那契数列有关：

3——百合、蝴蝶花

5——金凤花、飞燕草

8——翠雀花

13——金盏草

21——紫宛

34、55、89——雏菊

金凤花

翠雀花

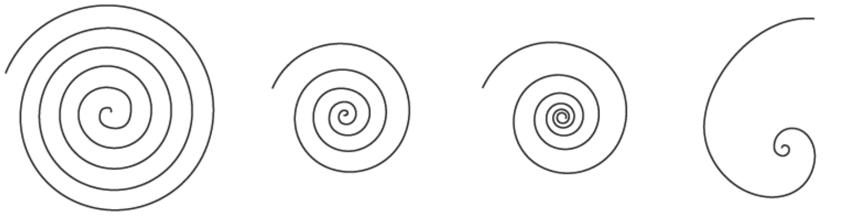
金盏草

紫宛

四、生命的螺旋线

在 2 000 多年以前，古希腊数学家阿基米德就对螺旋线进行了研究。因此，人们把等速螺旋线（一个点匀速离开一个固定点的同时又以固定的角速度绕该固定点转动而产生的轨迹）称为“阿基米德螺旋线”。

著名数学家笛卡儿于 1683 年首先描述了等角螺旋线（在曲线上的任意点处的矢径与切线的夹角为定值），并且列出了螺旋线的解析式：$r=ab^{\theta}$。由于在方程中出现了指数函数，这一螺旋线也被称为“对数螺旋线”。



阿基米德螺旋　2次螺旋　对数螺旋　斐波那契螺旋

更有趣的是瑞士数学家雅谷·伯努利，在逝世前请人在他的墓碑上刻了一条“蜗牛屋形”——对数螺旋线，并幽默地写上“我将按着原来的样子变化后

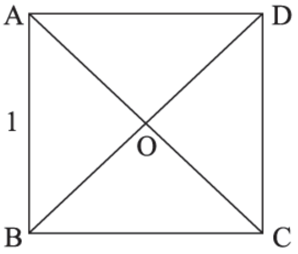
复活”的墓志铭。

热爱等角螺旋线的除了伯努利还有大自然。可能是由于它等角的特性，等角螺旋线是自然界中最常见的螺线。向日葵、菊和其他一些植物的种子在花盘

上排列出的曲线就是等角曲线，这样每颗种子受到周围其他种子所分泌生长素的抑制作用可以达到最小，同时当它们长大时可以保持形状不变。蕨类植物和其他一些植物的嫩叶也蜷曲成对数曲线的形状。

除了植物界，动物界也有不少等角螺线。鹦鹉螺的螺壳曲线就是等角螺线，这是由于鹦鹉螺在生长时内圈与外圈分泌石灰质的量总为一定值造成的，同理鹰嘴和鲨鱼的背鳍也是对数螺线的形状。另外，飞蛾扑火与老鹰盘旋也都是沿着等角螺线的轨迹移动。蜘蛛网的构造更是与等角螺线相似。

在地面上有四栋房子 A、B、C、D 构成一个正方形，现在要给这 4 座房子安装自来水管。由于安装自来水的材料费用昂贵，因此要尽可能地减少费用。也就是说，到这 4 个点的距离之和要最小，该怎么做到呢？（不用考虑水从哪里引出来）

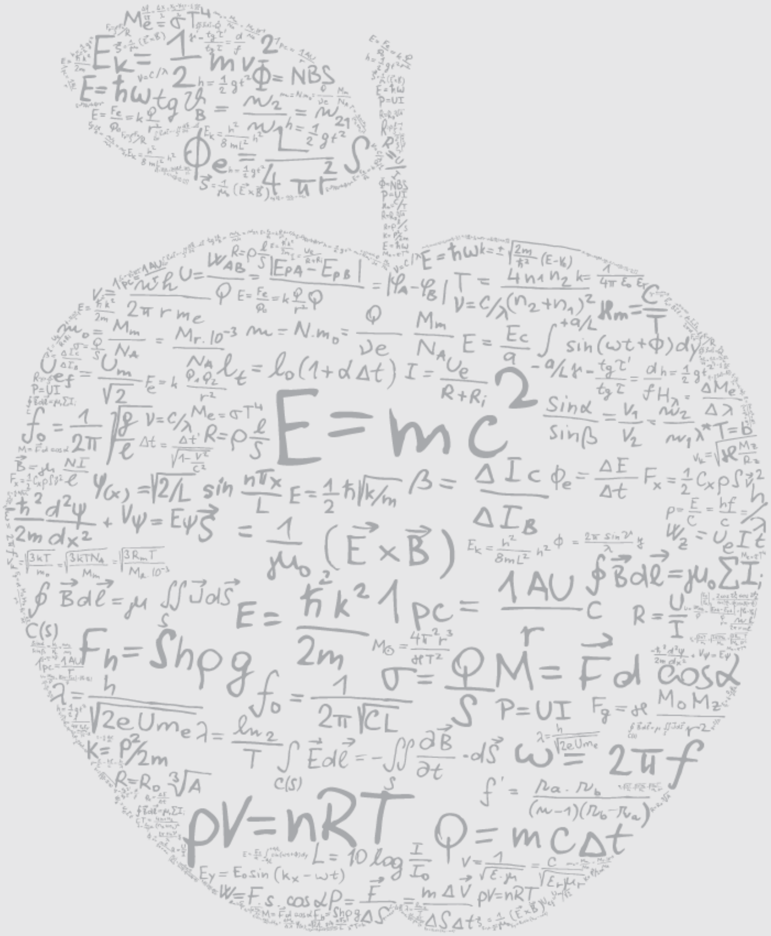


有人首先想到，水管从正方形的正中心分别引直线到 A、B、C、D 四个房子，因为两点之间直线最短，如右图所示。假设正方形的边长为 1，根据右图，我们可以算出四段水管的总长度为：$4\times\left(\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\right)\approx 2.828$。

那么，这个值是不是最小呢？答案是否定的。能不能想出使水管距离更小的安装线路呢？如果想不出来，就让大自然来告诉你答案吧。

你可以先做个实验。准备两块正方形的玻璃板，并在 ABCD 四个角上分别垂直放置一根玻璃柱支撑在两块玻璃板之间。然后在两块玻璃板之间加入肥皂水，一段时间后，从上面看会出现什么样的肥皂水膜。现在你看到的肥皂水膜的样子，就是你应该在四个房子之间应该铺设的水管线路。

为什么呢？自然界总是尽可能地想要"节约"，这种趋向是自然而然的。自然界会尽可能地节约使用资源，所以肥皂膜的表面积会尽可能地小。由于肥皂膜的高度是一定的（被夹在两块玻璃板之间），所以从上面看起来，"膜的表面积最小"就直接体现为"距离总和的最小"。

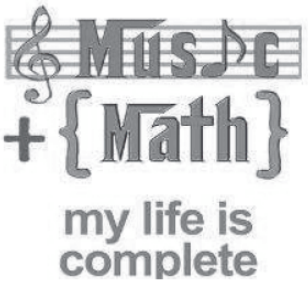


第五章

数 学 之 音

“音乐之所以神圣而崇高，就是因为它反映出作为宇宙本质的数的关系。”

——毕达哥拉斯 / 希腊哲学家、数学家



音乐曾被认为是一种属于数学的科学，它有着非常特殊的吸引力。从古典时代延续下来的一种传统认为，算术（研究数学）、几何学（研究空间关系）、天文学（研究天体运动）和音乐（研究耳朵觉察到的声音）形成了四种重要的人文科学。

音乐和数学都是人类文化艺术伟大的发现。从表面上看，音乐与数学是“绝缘”的，风马牛不相及，其实不然。数学是以数字为基本符号的排列组合，它是对事物在量上的抽象；而音乐是以音符为基本符号加以排列的组合，它是对自然音响的抽象。正是在“抽象”这一点上，将音乐与数学联结在了一起，它们都是通过有限去反映和把握无限。

德国著名哲学家、数学家莱布尼茨曾说过：“音乐，就它的基础来说，是数学的；就它的出现来说，是直觉的。”而爱因斯坦说得更为风趣：“我们这个世界可以由音乐的音符组成，也可以由数学公式组成。”

第一节　音乐与数学的内在联系

一、三角函数与音乐

正如物质的种子是“原子”，数字的种子是“质数”，那么音乐的种子就

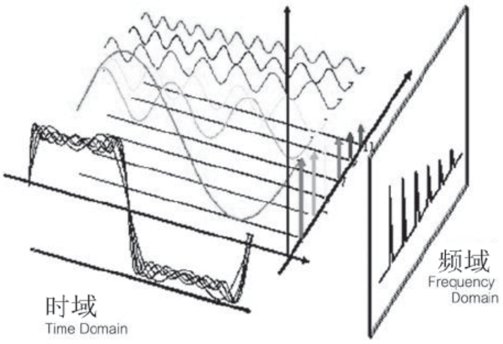
是“三角函数”。

“质数”就是除了 1 和其自身以外没有其他正约数的自然数，如 2、3、5、7、11、13、17、19、23 等。所有的自然数都可以用几个质数相乘的形式来表示，这叫作“正整数的唯一分解定理”。

自然界中的声音都是由无数的三角函数混合而成的，单一三角函数（sin 波）的声音在自然界中根本不存在。比如，用钢琴或是吉他弹一下“Do”，那个声音中混合了无数的三角函数。因为混合的方法不同，所以我们的耳朵能听到不同的“音色”。

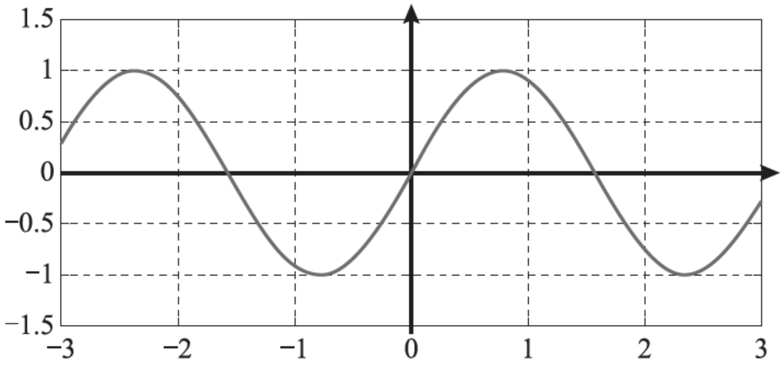
构成声音的“原子”以不同的三角函数方式的混合，就产生了不同的声音，这在数学中称为“傅里叶分析”。19 世纪的法国有一位数学家叫约瑟夫 • 傅里叶 (Joseph Fourier)，正是他的努力使人们对乐声性质的认识达到了顶峰。他证明了所有的乐声，不管是器乐还是声乐，都可以用数学式来表达和描述，而且证明了这些数学式是简单的周期正弦函数的和。

因此，每一个声音都有三个性质，即音高、音量和音质，可以在图形上清楚地表示出来。音高与曲线的频率有关，音量和音质分别与周期函数的振幅和形状有关。

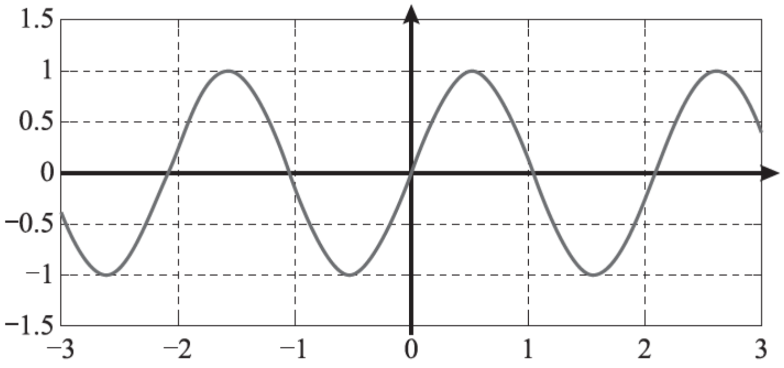


两个或以上的音的结合，称为“和弦”。同样可以用正弦函数相叠加来表示和弦。如两分音最简频率比为 3 : 2 的二和弦可表示为正弦函数 $f(x)=\sin 2x$

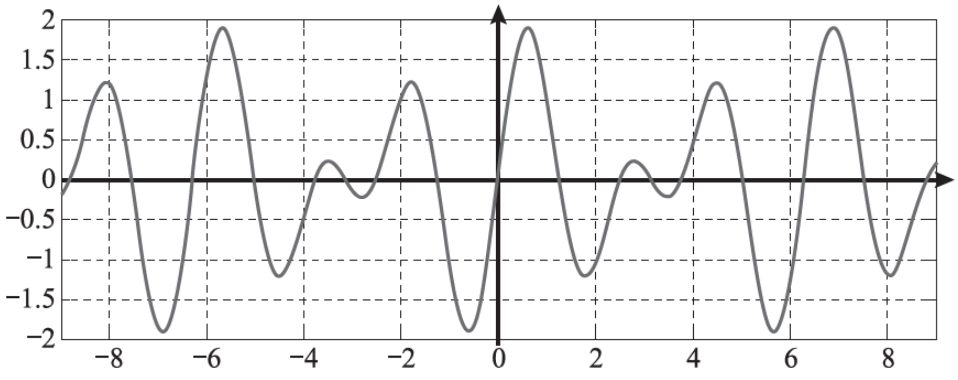
和 $f(x)=\sin 3x$ 相加而得到的三角函数 $f(x)=\sin 2x+\sin 3x$，如下图所示。



$f(x)=\sin(2 \cdot x)$



$g(x)=\sin(3 \cdot x)$



$h(x)=\sin(2 \cdot x)+\sin(3 \cdot x)$

二、音程与音阶

在乐音体系的音列中，各音就叫作“音级”。常见的 7 个基本音级：“1、

2、3、4、5、6、7”或用唱名表示即“Do，Re，Mi，Fa，Sol，La，Si”。

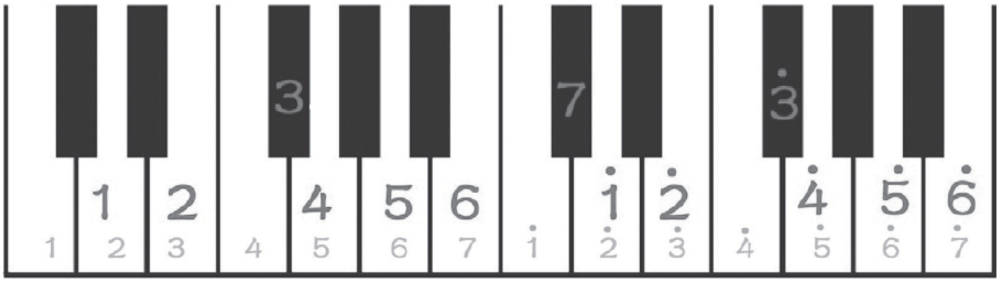
两个乐音之间的音高关系，叫“音程”，用“度”作为单位，用来衡量音与音之间在听觉上的距离。以简谱为例，从“1”到“1”，或从“2”到“2”都是一度，从“1”到“3”或“2”到“4”都是三度，从“1”到“5”是五度。

相邻的两个音之间最小的距离叫半音，两个半音距离构成一个全音。

音阶是一组具有特定关系的乐音，在一个八度音程内，依照音高顺序排列起来的乐音列。由于这种乐音列中各乐音依次升高或降低，犹如用乐音构成的阶梯一般，故中文称为“音阶”。音阶分为“大音阶”和“小音阶”，即“大调式”和“小调式”。大音阶由 7 个音组成，其中第 3、4 音之间和第 7、8 音之间是半音程，其他音之间是全音程。小音阶由 5 个音组成，其中第 2、3 音之间和 5、6 音之间为半音程。

五声音阶广泛流行于亚洲、非洲、中太平洋的一些群岛、匈牙利、苏格兰民间音乐以及在欧洲人到达美洲之前的美洲本土部族中，也常被称为“中国音阶”，其五阶在中国传统文化中有专用的名称，分别称为：宫、商、角、徵、羽。

现代钢琴键盘上相邻两个琴键（包括白键和黑键）构成半音，相隔一个琴键的两键之间构成全音。



现代音乐用七个英文字母 C、D、E、F、G、A、B（或其小写）来标记音名。这七个不同高低的音，其相邻音之间的音高距离，有半音和全音之分，其

中 E 与 F、B 与 C 之间为半音关系，其余相邻音之间为全音关系。

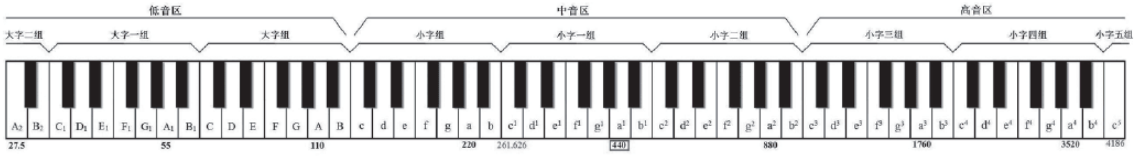
“Do”是唱名，与绝对音高（频率、波长）无关，每个大调主音（第一个音）的唱名都是“Do”。唱名只能代表音频之间的相对关系。

“C”是音名，与绝对音高挂钩，“C 大调”主音就是“C”，所谓“调”就是按照主音的音名来命名的，主音之后按照“全全半全全全半”的规律往下排就行。小调也类似，不过是按照“全半全全半全全”的规律排的。基本音阶为“C 调”大音阶，此时唱名“Do、Re、Mi、Fa、Sol、La、Si”与音名“C、D、E、F、G、A、B”一一对应，因此，“C 大调”是最自然的大调，在钢琴上弹奏时全用白键。

在音乐课上唱歌的时候，如果一首歌唱不上去，音乐老师经常会说“唱低八度”，这时候虽然声音低了许多，但与原唱并不冲突，与伴奏也仍然和谐。那为什么“八度”那么特殊呢？或者说，为什么差八度的音听着还那么像呢？

前面说到，声音的本质是波，一定的音高对应一定的频率。频率定义为每秒钟物体振动的次数，用每秒振动 1 次作为频率的单位称为 Hz。频率过高或过低的声音人耳不能感知或会感觉到不舒服，音乐中常使用的频率范围是 16 ～ 4 000Hz，而人声及器乐中最富于表现力的频率范围是 60 ～ 1 000 Hz。

每个听起来有确定音高的音，它的振动都是规则的，是可以保持在某个频率上的。在前人的尝试和实践中，他们发现频率为二倍关系的两个音听起来有相似性。比如“Do”与“低音 Do”与“高音 Do”，听起来类似，虽然比较起来高度差很多。



钢琴标准键盘图

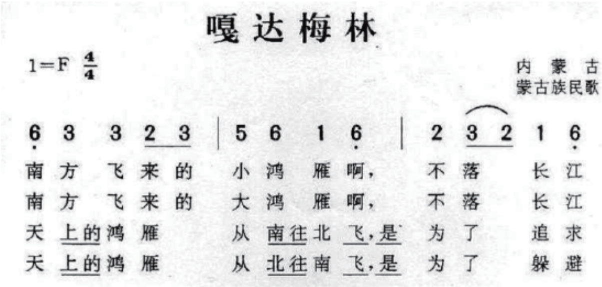
具有倍频关系的音听来有相似性，比如说 220Hz、440Hz、880Hz 这样频率的音，听起来类似，这就成为人们确定音律的重要基础。因为相似，也就是

说音阶可以以这个距离为单位循环往复，本来无规律的无数个音，因此可以变得有规律起来。于是以倍频关系的两音在听觉上的距离为基础，人们相继定出了这两个音之间的各个音，从而组成一个音阶，由于倍频音有相似性，于是这个音阶就可以向上和向下循环扩展，组成一组一组相连接的音阶。

音名的绝对音高是音乐家和物理学家在19世纪时确定的，基准是“高音A”（440Hz），也就是小提琴“A弦”空弦音。其他音名都是按十二平均律算出来的，比如“高音C”的频率为261.63Hz。

当按下钢琴的C4，这时空气中激荡着的不只有261.6Hz的声波，还有523.3Hz、784.9Hz、1 046.5Hz等声波（称为泛音列）。注意523.3Hz是C5，1 046.5Hz是C6。这就告诉我们，同一音名的两个音之间肯定有陪音（泛音）的关系。C5本身就是C4最近的一个陪音，C5的陪音也都是C4的陪音，所以弹C5时产生的音频弹C4时也会产生，这就是为什么听起来和谐的原因。

三、节拍



节拍，乐曲中表示固定单位时值和强弱规律的组织形式。如今人们记录音乐最常用的方法是简谱和五线谱。在每一首乐曲的开头部分，我们总能看到一个分数，比如2/4、3/4、3/8、6/8等，这些分数是用来表示不同拍子的符号，即为音乐中的“拍号”(the time signature)，其中分数的分子表示每小节单位拍的数目，分母表示单位拍的音符时值，即表示以几分音符为一拍。

拍号要写成分数的形式，是因为在五线谱中把全音符作为整数1看待。全音符是1，二分音符是全音符的一半，自然是1/2，四分音符的时值就是1/4。以四分音符为例，每小节有2拍（两个四分音符）时，拍号就要写为2/4，如

果每小节有 3 拍（三个四分音符）就写成 3/4，这样以此类推。

五线谱		𝅝	𝅗𝅥	♩	♪	𝅘𝅥𝅯
简谱		1———	1—	1	$\underline{1}$	$\underline{\underline{1}}$
拍	以四分音符为1拍	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
	以八分音符为1拍	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$
数	以二分音符为1拍	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

拍号中时值的实际时间，应视乐曲所标速度而定。在不同节拍类型中，每小节只有一个强拍的叫单拍子，如 2/4、2/8 是单 2 拍子，3/4、3/8 是单 3 拍子。每小节有一个强拍并有次强拍的叫复拍子，如 4/4、6/8 是复 2 拍子，9/8、9/16 是复 3 拍子。

拍号一旦确定，那么每小节内的音符就要遵循由拍号所确定的拍数，这可以通过数学中的分数加法法则来检验。这些看似简单的要求正是音乐作曲的基础。

第二节　毕达哥拉斯与音乐的不解之缘

一、琴弦定律

2500 多年前的一天，一阵阵“叮当！叮当！”很有节奏的金属敲击声把正在散步的毕达哥拉斯从冥冥苦思中唤醒。他抬头往声音传来的方向望去，喃喃自语道：“哦，那是一家铁匠铺。”音乐家的本性使他细细品味着那悦耳的打铁声，就像在欣赏打击乐演奏的一首韵律明快的“打铁进行曲”。突然间，他那敏锐的耳朵捕捉到其中交织着的不同和声，近来一直被和声问题所困扰的他，眼前顿时一亮。直觉告诉他：眼前有了一条可引人走出和声迷宫的线索。他控制住加快的心跳，信步拐进了铁匠铺。

在铁匠铺里，铁匠师傅们在数台铁砧上锤打着不同的铁块，时不时调换着不同的铁锤，毕达哥拉斯出神地站着。经过反复比较和苦苦思索，他发现锤声的钝锐和铁锤、铁块、铁砧的形状无关，也同铁匠的用力无关，而是由不同的铁锤的重量所决定的。每当听到和声发出，他就请铁匠师傅在换锤间歇时称一下重量，进而发现：和谐悦耳的敲击声是由重量为 12、9、8、6 磅的铁锤两两搭配时发出的，其他的搭配就不那么顺耳了。他当场兴奋地记下了音度和铁锤重量比的关系：12 : 6（即 2 : 1）对应八度音，9 : 6（即 3 : 2）对应于五度音，12 : 9（即 4 : 3）对应于四度音，9 : 8 对应于二度音。

“音程之比越简单，和声越和谐。这是真的吗？”毕达哥拉斯反思着。于是他决定通过反复实验来验证。尔后，他又在琴弦上进行试验，进一步发现只要按比例划分一根振动着的弦，就可以产生悦耳的音程：如 2 : 1 产生八度，3 : 2 产生五度，4 : 3 产生四度等。

毕达哥拉斯在世界上第一次发现了音乐和数学的联系，从此使音乐成为一门建立在数学基础上的艺术科学，这便是琴弦定理。

琴弦定理：在给定张力作用下，一根给定弦的频率 f（每秒内振动次数）与其长度 L 成反比；音程之比愈简单，和声愈和谐。

毕达哥拉斯（Pythagoras，约公元前 575 至公元前 500 年），出生在爱琴海中的萨摩斯岛（今希腊东部小岛）中一个贵族家庭，自幼聪明好学，曾在名师门下学习几何学、自然科学和哲学。他不仅是位杰出的哲学家、数学家、天文学家和教育家，还是个有名的音乐家、琴师和歌手，他提出了“万物皆数”和“宇宙和谐”的理念，并据此认为由“智慧的数”组成的音乐是完美的，而其中最完美的是天体发出

的“宇宙音乐”。因为向往东方的智慧，游历了当时世界上两个文化水准极高的文明古国——巴比伦和印度，吸收了美索不达米亚文明和印度文明（公元前 480 年）的文化。他是第一个注重“数”的人，并用演绎法证明了巴比伦人所知的：直角三角形斜边平方等于两直角边平方之和，即毕达哥拉斯定理（中国人称之为勾股定理）。

宇宙是由声音和数字组成的　　——毕达哥拉斯

当时毕达哥拉斯学派[①]用比率将数学与音乐联系起来。他们不仅认识到所拨琴弦产生的声音与琴弦的长度有着密切的关系，从而发现了和声与整数之间的关系，而且还发现和声是由长度成整数比的同样绷紧的弦发出的。于是，毕达哥拉斯音阶 (the Pythagorean Scale) 和调音理论诞生了（见下表），而且在西方音乐界占据了统治地位。

毕达哥拉斯的音阶表

Do	Re	Mi	Fa	Sol	La	Si	Do
1	9/8	81/64	4/3	3/2	27/16	243/128	2

西方人格外重视 2 和 3。12 进制的时钟、4 拍、3 拍、由 12 种音组成的钢琴键盘，似乎都证实了这一点。与其相对，东欧、俄罗斯和亚洲各地有很多悲伤柔和的“5 拍”民族音乐。它们的文化中处处都能找到数字 5 的踪迹。

毕达哥拉斯发现的 Do、Re、Mi 只是从质数 2 和 3 中得到的，他并不知道 5 倍音的 Mi，或者干脆忽视了它。因此，毕达哥拉斯的音阶存在很多问题，但仍在很长一段时间内支配着西洋音乐。这期间基本不存在和弦的观念，音乐

① “毕达哥拉斯学派”是毕达哥拉斯到意大利的南部传授数学及宣传他的哲学思想，并和他的信徒们所组成的一个政治和宗教团体。

由几组旋律重合组成。

后来，西方人从凯尔特人的音乐中发现了令人陶醉的 Mi。随着文艺复兴的过渡，“5 倍音”的新体系在西方音乐中兴起，这就是“纯律”。这意味着音乐的性质从旋律过渡到和声。以发现 5 的美感为契机，西方音乐中掀起了一场巨大革命。纯律音阶 (the Just Scale) 比毕达哥拉斯音阶看起来精练多了（见下表）。

纯律音阶表

Do	Re	Mi	Fa	Sol	La	Si	Do
1	9/8	5/4	4/3	3/2	5/3	15/8	2

相比于动听的声音，步入大规模生产的现代社会的人类更重视功能性。这导致“平均律”在全球成为主流。十二平均律最早是由中国明朝音乐理论家朱载堉提出的。平均律是将一个八度 12 等分的音阶。每一等份称为一个半音即小二度，后一个音的频率是前一个音频率的$\sqrt[12]{2}$倍。一个全音即大二度则是两等份，后一个音的频率是前一个音频率的$\sqrt[6]{2}$倍。例如“Do”和 F #（间隔 6 个半音）的振动频率比为$\sqrt{2}$。

将一个八度音程分成 12 等份有着惊人的凑巧。它的纯五度音程的两个音的频率比（2 的 7/12 次方）与 1.5 非常接近，人耳基本上听不出“五度相生律”和“十二平均律”的五度音程的差别。十二平均律在交响乐队和键盘乐器中得到广泛使用，现在的钢琴即是根据十二平均律来定音的。

平均律中的音与八度以外任何音的振动频率比都是无理数，完全无法和谐融合。在平均律大环境中成长起来的现代音乐丧失了纯粹的美，旋律感也减弱了。但是，平均律带来的“对称性”实现了自由变调。它摆脱了美感所带来的束缚追求自由，能够与科学的进步并驾齐驱，并以不同的形式发展着。

毕达哥拉斯音阶和调音理论的这种统治地位直到十二平均律音阶（the Tempered Scale）及相应的调音理论出现才被彻底动摇。

著名俄裔美籍物理学家乔治•伽莫夫在名著《物理学发展史》（1962年）中，高度评价了毕达哥拉斯的琴弦定律。他说："这一发现大概是物理定律的第一次数学公式表示，完全可以认为是今天所谓理论物理学发展的第一步"。

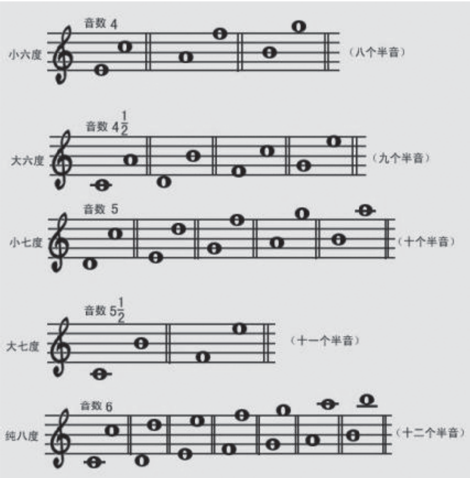
二、毕达哥拉斯音差常数

音差常数，即和谐音程常数。音程指两个音级在音高上的相互关系，就是指两个音在音高上的距离，其单位名称叫作"度"。

在钢琴上每连续弹奏八个白键便会回到初始的音符，只不过高了八度。相差八度的两个音拥有一致的名称和音色，而振动频率则刚好差一倍。在原则上，可以人为地将音符频率不断加倍从而得到一系列高八度的音符。然而高八度的两个音符在一起奏鸣却并不能够让人感到悦耳。

古代的音乐家们试图寻找更加令人心情愉快的组合，他们因此而发现了五度和弦。所谓"和弦"，其实是指同时弹奏两个或者两个以上的音符。在所有和弦当中，钢琴上每隔开五个白键所弹奏的声音最为悦耳动听，这是种普适规律。

而毕达哥拉斯及弟子经过研究发现：五度和弦作为最容易打动聆听者的音乐形式存在数学比例关系！对于任意两个能够组成五度和弦的音符来说，其弦长之比（或振动频率之比）总会显现为严格而规律的 2∶3。而该比例恰好是古埃及祭司在各种宗教壁画中以及古代中国人在《易经》体系里曾反复描述的"阴阳和谐"！似乎音乐并不是一种简单而无规则的振动发声，而是被宇宙间某种最精确的规律所支配。不过这种规律显然存在着内部矛盾，八度音程中的 2∶1 以及五度和弦呈现的 2∶3 不可以通约。当人们想要跨越八度弹奏五度和弦时，就会发现音阶规律突然被打乱。正如弗洛拉•莱文女士（Flora R. Levin）在研究古希腊音乐思想时曾经描绘的：

“毕达哥拉斯对宇宙和谐音的分析导致了不可通约数的发现。不管他们可能将这些数字如何排列比较，不管他们将其拐弯抹角的数学论证可能推进到何种地步，事实依然不存在把全音分成相等两部分的分数 *m*/*n*。至今这一事实仍然未能从数学上给出任何合理解释。”

毕达哥拉斯曾做出过无比绝妙的尝试。他试图通过无限倍增寻找两者的“最小公倍数”。这种尝试使得他最终发现：从同一个指定音符出发，跨越 7 次八度音程或 12 个五度音程能够近似到达同一个音符。若借助数学的语言，可以这样理解：将某个音连续地提升 7 个八度，最终会到达相当于原始频率 128 倍的位置，即 2 的 7 次方；而该原音连续地提升 12 个五度音程后，即 1.5 的 12 次方，同样能到达原始频率的 128 倍。唯一令人感到美中不足的地方在于：跨越七个八度到达的 128 倍是精确的整倍数；跨越 12 个五度音程收获的 128 倍却只是个约数。12 个五度音程其实仅能引导人触及原始频率的 129.75 倍！这两个倍数的细微差别即是毕达哥拉斯音差：129.75 ÷ 128 = 1.013 6（一般情况下取其小数部分 0.013 6）。

罗伯特 • 坦普尔在其作品中委婉而不失坚定地写道：“如果将圆周率之尾数乘以 10 的较低次幂运算的通用测不准系数，如 0.09604，就会得到毕达哥拉斯常数的小数部分。（0.141 6×0.096 04=0.013 6，0.141 6 是圆周率 3.141 6 的尾数）。据此我们可以说毕达哥拉斯常数小数部分是圆周率尾数的函数。”

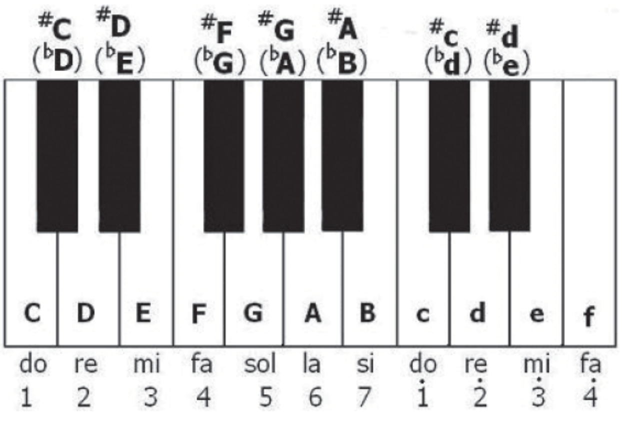
毕达哥拉斯音差常数描述的恰恰是频率的不同，而非音色的差异。然而不同频率体系之间广泛存在的难以协调性其实暗示了我们某些最深刻的宇宙学原理：作为乐器本身自然属性的八度音程和作为人类审美规则的五度和弦难以协调，恰恰说明了我们人类实际上在追求一种超越自然的美。

毕达哥拉斯认为：“音乐之所以神圣而崇高，就是因为它反映出作为宇宙本质的数的关系。”世界上哪里有数，哪里就有美。数学像音乐及其他艺术一样能唤起人们的审美感觉和审美情趣。在数学家创造活动中，同样有情感、意志、信念等审美因素参与，数学家创造的定义、定理、公理、公式、法则如同所有的艺术形式如诗歌、音乐、绘画、雕塑、戏剧、电影一样，可以使人动情陶醉，并从中获得美的享受。

第三节　斐波那契数列与音乐

一、钢琴与斐波那契数列

被称为“乐器王者”的钢琴是西洋古典音乐中的一种键盘乐器，由 88 个琴键（52 个白键，36 个黑键）和金属弦音板组成，它们各自的频率组成一个等比数列，比例系数是 2 开 12 次方，即，“中音 A”(左起第 49 个键)的频率规定为 440Hz，于是所有 88 个键的频率都确定了。在钢琴的键盘上，从一个 C 键到下一个 C 键就是音乐中的一个八度音程，其中共包括 13 个键，有 8 个白键和 5 个黑键，而 5 个黑键分成 2 组，一组有 2 个黑键，一组有 3 个黑键。如下图所示：



如果我们把这些数字放在一起：1、1、2、3、5、8、13，它们恰好是斐波那契数列中的前几个数。我们来看一下音符关系图：

名　称	形　状	时　值 （以四分音符为一组）	比　例
全 音 符	𝅝	4拍	1
二分音符	𝅗𝅥（𝅗𝅥）	2拍	$\frac{1}{2}$
四分音符	♩（♩）	1拍	$\frac{1}{4}$
八分音符	♪（♪）	$\frac{1}{2}$拍	$\frac{1}{8}$
十六分音符	𝅘𝅥𝅯（𝅘𝅥𝅯）	$\frac{1}{4}$拍	$\frac{1}{16}$
三十二分音符	𝅘𝅥𝅰（𝅘𝅥𝅰）	$\frac{1}{8}$拍	$\frac{1}{32}$

从上图可以很容易找出规律，钢琴的音阶是根据等比数列来规定，即：

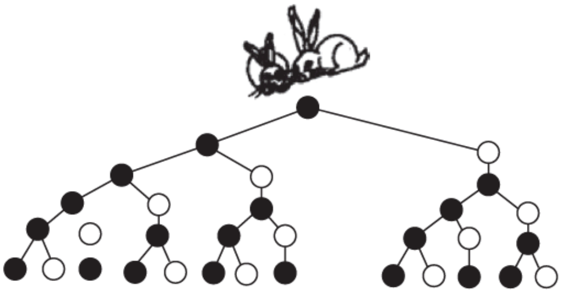
$$a_n=a_1 \cdot q^{(n-1)}$$

列昂纳多•斐波那契（Leonardo Fibonacci，1170—1240 年），意大利数学家，“斐波那契数列”和分数的发明者。1202 年，他撰写了《珠算原理》(*Liber Abaci*) 一书。他是第一个研究了印度和阿拉伯数学理论的欧洲人。他还曾在埃及、叙利亚、希腊、西西里和普罗旺斯研究数学。

二、斐波那契数列

意大利数学家列昂纳多•斐波那契（Leonardo Fibonacci）在《计算之书》中提出了一个有趣的兔子问题：若一对成年兔子每个月恰好生下一对小兔子（一雌一雄）。在年初时，只有一对小兔子。在第一个月结束时，他们成长为成年兔子，并且第二个月结束时，这对成年兔子将生下一对小兔子。这种成长与繁殖的过程会一直持续下去，并假设生下的小兔子都不会死，那么一年之后共可有多少对小兔子？

繁殖的过程可以通过一棵“家族树”来表示：



让我们来推算一下在第五个月结束时兔子的总数：

第 1 个月：只有 1 对兔子；

第 2 个月：兔子没有长成，仍然只有 1 对兔子；

第 3 个月：这对兔子生了 1 对小兔子，这时共有 2 对兔子；

第 4 个月：老兔子又生了 1 对小兔子，上个月出生的兔子还未成熟，这时共有 3 对兔子；

第 5 个月：这时已有 2 对兔子可以生殖，于是生了 2 对兔子，这时共有 5 对兔子；

如此推算下去，我们不难得出下面的结果（见下表）：

月份数	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	…
兔子数（对）	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	…

繁殖的兔子对数形成一个这样的数列：1，1，2，3，5，8，13，21，34，55，……

这个数列是有规律可循的，即从第 3 项开始，每一项都等于前两项之和。如果设 $F(n)$ 为该数列的第 n 项（$n \in N^*$），那么这句话可以写成如下形式：

$$F(n)=F(n-1)+F(n-2)$$

显然这是一个线性递推数列。

为了纪念斐波那契，人们把这个数列称为“斐波那契数列”。它的通项公式为：

$$a_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

如果我们把斐波那契数列的后一项比前一项，即 $F(n)$ / $F(n-1)$，我们会发现这个比值竟然会收敛于黄金分割比 1.618（见下表）

1/1	2/1	3/2	5/3	8/5	13/8	21/13	34/21	55/34
1	2	1.5	1.333	1.6	1.625	1.615	1.619	1.617

斐波那契数列的平方和有什么性质？即 $\sum F^2(n)=?$

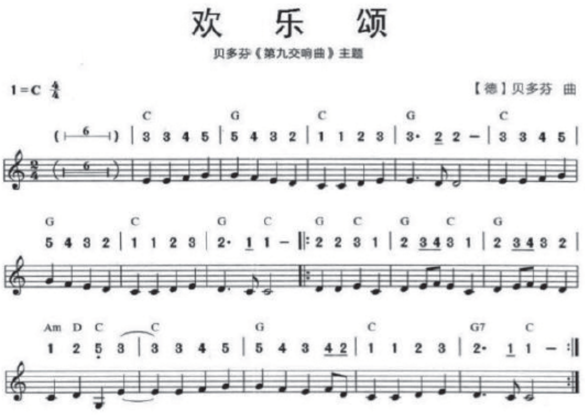
三、斐波那契数列在音乐中的应用

一些数学家通过分析传统的音乐曲式结构，发现音乐中对于曲式的规定符合斐波拉契数列的前几个数字：作曲中最常用的一段式、二段式、三段式和五段式的回旋曲，其段落的数量符合斐波拉契数列里面的 1，2，3，5。而古典音乐中比较常见的大奏鸣曲式都是三部结构，如果再增加前奏和尾声部，那么就会拓展为五部结构，还是会体现斐波拉契数列任意三个数的前两个数之和等于第三个数的特质。

斐波那契数列被广泛应用于乐曲高潮的设计中。

斐波拉契数列还有一个性质，就是**“在数组中任意相邻的两个数之间的比值约等于黄金分割比例（0.618）”**。其实如果我们仔细观察著名的音乐作品中的结构很容易发现，黄金分割比例在音乐曲式中基本上处处可见。根据美国数学家巴兹等人的实验结果，西方古典音乐里面不同规模形式的作品中，高潮部分音符所在的小节，基本上都恰好位于整部作品的黄金分割点。不难发现，对莫扎特的作品进行进一步分析后发现，莫扎特钢琴协奏曲中 94% 的作品都符合这一规律。

肖邦的作品《降 D 大调小夜曲》中一共包含了 76 个小节，理论上黄金分

割点应该位于第 46 小节，事实上，全曲高潮部分的音符恰恰是出现在了第 46 小节处，真是巧夺天工。

贝多芬的《第九交响曲》，及《悲怆奏鸣曲》第二乐章是如歌的慢板，回旋曲式，全曲共 73 小节。理论计算黄金分割点应在45 小节，在43 小节处形成全曲激越的高潮，并伴随着调式、调性的转换，高潮与黄金分割区基本吻合。

拉赫曼尼诺夫的《第二钢琴协奏曲》第一乐章是奏鸣曲式，这是一首宏伟的史诗。第一部分呈示部悠长，刚毅的主部与明朗、抒情的副部形成鲜明对比。第二部分为发展部，结构紧凑，主部、副部与引子的材料不断地交织，形成巨大的音流，音乐爆发高潮的地方恰恰在第三部分再现部的开端，是整个乐章的黄金分割点，不愧是体现黄金分割规律的典范。此外这首协奏曲的局部在许多地方也符合黄金比例。

俄国伟大作曲家里姆斯基－柯萨科夫在他的《天方夜谭》交响组曲的第四乐章中，写至辛巴达的航船在汹涛骇浪里，无可挽回地猛撞在有青铜骑士像的峭壁上的一刹那，在整个乐队震耳欲聋的音浪中，乐队敲出了一记强有力的锣声，锣声延长了六小节，随着锣声的逐渐消失，整个乐队力度迅速下降，象征着那艘支离破碎的航船沉入海底。在全曲最高潮即“黄金点”时，大锣致命的一击所造成的悲剧性效果慑人心魂。

在现代信息技术日新月异的今天，音乐和数学的联系只会越来越紧密，在音乐理论、音乐作曲、音乐合成、电子音乐制作等各方面，数学都发挥着重要的作用。数学的最高境界就是至美，包括结构之美、推演之美、简洁和谐之美。音乐及其他一切艺术的最高境界也是完美。音乐旋律的展开与数学上的奇妙运算过程有着同样的韵律。

四、数字在音乐中的寓意

众所周知，古今中外的音乐虽然千姿百态，但都是由 7 个音符组成的，1—7 在音乐中是神奇的数字。

数字 1：万物之本。《老子》云："道生一、一生二、二生三、三生万物。"整个宇宙就是一个多样统一的和谐整体。这条美感基本法则，适用于包括音乐在内的所有艺术及科学之中。古希腊数学家尼柯玛赫早就提出"音乐是对立因素的和谐统一"。中国俗语也说："九九归一"。文艺复兴时期以来五百年的专业音乐在内容和形式上尽管存在天壤之别，但都共同遵循这个原理。音乐上许多发展乐思的手法，如重复、变奏、衍生、展开、对比等，有时强调统一，有时强调变化，综合起来，就是在统一中求变化，在变化中求统一。单音是音乐中最小的"细胞"，一个个单音按水平方向连结成为旋律、节奏，按垂直方向纵合成为和弦、和声。乐段（一段体）是表达完整乐思的最小结构单位。

数字 2：洛克、古典、浪漫派音乐使用大小调调式体系，形成音阶与和声学的二元论（dualistic theory）。

数字 3：三个音按三度音程叠置成为各种和弦，三和弦是最常用的和声建筑材料。爱因斯坦认为不管是音乐家还是科学家都有一个强烈的愿望："总想以最适合的方式来画出一幅简化的和易于领悟的世界图像。"数字"2"与"3"在音乐中概括了最基本的节拍类型二拍子与三拍子以及曲式类型二段式、三段式；$T^2=D^3$ 是开普勒行星运动第三定律的数学公式，表示行星公转周期（T）的二次方与它同太阳距离（D）的三次方相等。开普勒从大量十分零乱的观测资料中发现了这个自

然规律，它是那样简洁、优美，被人称为奇妙的“2”与“3”。

数字 4：人声天然地划分为四个声部，任何复杂的多声部音乐作品都可以规范为四部和声。我们平时所弹奏的钢琴作品的曲式结构，大多数都是“古典四方体”方整结构，即 4+4+4+4+…，4 小节为一乐句，8 小节为一乐段。

数字 5：五度相生律（毕达哥拉斯律）及五度循环揭示了乐音组织的奥秘，而和声五度关系法则是构筑和声大厦的基石。

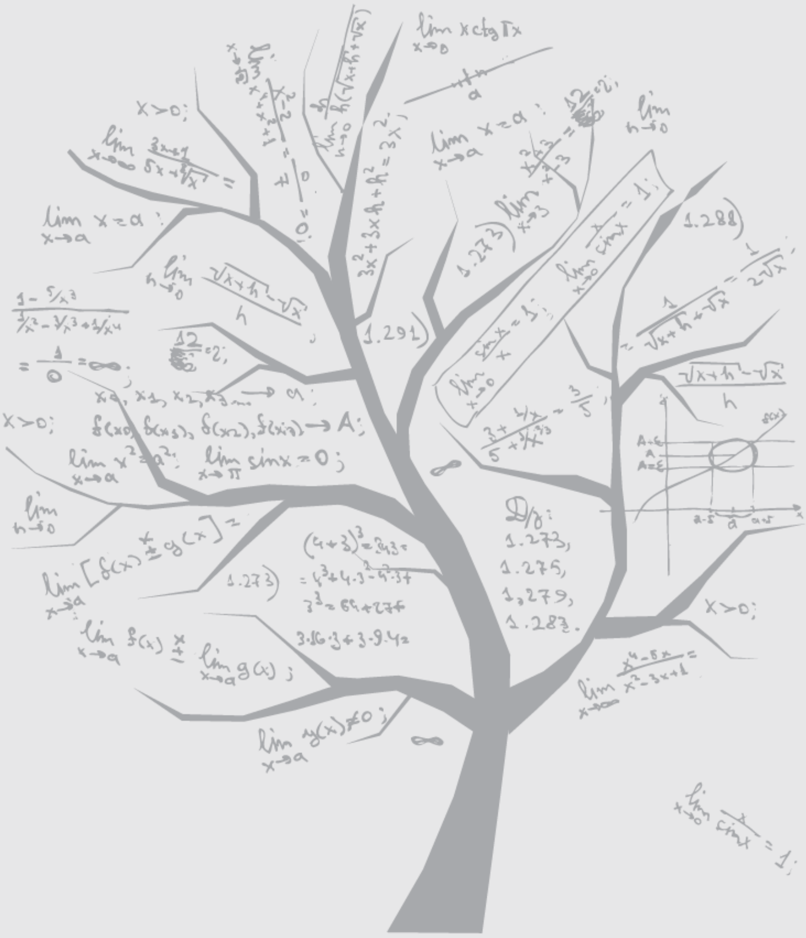
数字 6：六和弦、六声音阶、一个八度之内有六个全音，常用的调是主调及其五个近关系副调。

数字 7：更显神秘莫测，常用的七声音阶由七个音符组成，巴洛克时期以前采用中古教会七种调式，19 世纪民族乐派之后中古教会七声调式部分地得到复兴。太阳光谱由红、橙、黄、绿、青、蓝、紫七色组成，以牛顿为代表的科学家，曾对“七音”与“七色”之间奥妙的对应关系进行过有趣的探索。人体生理结构分为七大系统。旧约圣经中上帝创造世界用了七天，因此一个星期有七天。化学元素是物质世界的基础，门捷列夫发现的“元素周期表”的结构图中有七个横行、七个周期，还有七个主族、七个副族。

音乐中出现数学、数学中存在音乐并不是一种偶然，而是数学和音乐融和贯通于一体的一种体现。音乐能诠释人们的喜怒哀乐，我们通过音乐把自己对大自然、人生的态度等表现出来，即通过音乐抒发人们的情感。我们也可以不

用语言，单凭音乐和他人甚至是动物、植物来进行简单或者复杂的情感沟通和交流。而数学则是以一种理性的、抽象的方式来描述世界，使人类对世界有一个客观的、科学的理解和认识。

数学和音乐的结合是一种感性与理性的融通，如果我们能将这种关系加以完善和利用，那么一定可以演绎出一种无与伦比的“完美乐章”！



第六章

数 学 之 语

第一节　文明的载体

远古时期，在北京郊外周口店的洞穴里，居住着人类的祖先北京猿人。从他们遗留下来的石器和动物的骨骼，可以大致知道他们从事什么样的劳动，吃什么样的食物。但是要推测他们的数学水平就非常困难了。因为数这个东西是无形的，往往没有一种直接了解的线索。

一般来说，文明程度越低的种族掌握的数词也就越少，并且通常都是很小的数。

有的种族把数和身体的各部分联系起来进行统计，甚至把数与身体各部分的名称对应。用这种方法可以数到几百，但要记住它们却不是件容易的事情，因为这会过度使用记忆力。

面对这种困难，人们就想到了把一定的数归纳成“一束”来命名的方法。最初出现的是将每两个数归成一束，这就是二进制的萌芽。

一、二进制

二进制数据是用 0 和 1 两个数字来表示的数。它的基数为 2，进位规则是“逢二进一”，借位规则是“借一当二”。因为它只使用 0、1 两个数字符号，非常简单方便。

二进制转十进制的方法：“按权展开求和”，例如：

$(1\,011.101)_2=1\times2^3+0\times2^2+1\times2^1+1\times2^0+1\times2^{-1}+0\times2^{-2}+1\times2^{-3}=(11.625)_{10}$

十进制数转换成二进制数的方法是：十进制数的整数部分“除以 2 取余，逆序排列”，十进制数的小数部分“乘 2 取整，顺序排列”。例如，十进制数 89.625 转换为二进制数是：1 011 001.101。

89÷2 ……1

44÷2 ……0

22÷2 ……0

11÷2 ……1

5÷2 ……1

2÷2 ……0

1÷2 ……1

0

注意：一定要除到商为 0 为止，再将余数逆序排列。

0.625×2=1.250 ……1

0.25 ×2=0.50 ……0

0.50 ×2=1.00 ……1

注意：不是任何一个十进制小数都能转换成有限位的二进制数。

二进制在历史上的各个时期曾经多次出现过。中国古代的《易经》也是基于阴阳两种东西的对立，自然也与二进制有关。卦画系统中最小单位为“爻”（Yáo），对应二进制中的位。爻是《易经》中组成卦的符号，“—”为阳爻，“--”为阴爻。卦可以看作通过“爻”组合而成的二进制数。每“三爻”合成一卦，可得八卦；两卦（“六爻”）相重，则得六十四卦。

此外，在发掘古代印度河流域的繁荣都市时，据说从宝石商店的遗址和类似的地方发现了以 1、2、4、8、16、32、64 为重量比例的砝码。这些也都清楚地说明了古人曾经使用过二进制。

热心推崇二进制的人，是 18 世纪德国数理哲学大师莱布尼兹（G. W. Leibniz，1646—1716）。莱布尼茨还赋予了二进制宗教内涵。他认为“1”象征神，“0”象征虚无，是神和虚无创造了整个宇宙。在德国图林根著名的郭塔王宫图书馆保存着一份莱布尼茨弥足珍贵的手稿，其标题为：“1 与 0，一切数字的神奇渊源。这是造物秘密美妙的典范，因为，一切无非都来自上帝。”

1701 年莱布尼兹写信给在北京的神父 Grimaldi 和 Bouvet 告知自己的新发明，希望能引起他心目中的“算术爱好者”康熙皇帝的兴趣，并劝中国皇帝信仰基督教。Bouvet 很惊讶，因为他发现这种“二进制的算术”与中国古代的一种建立在两个符号基础上的符号系统是非常近似的，这两个符号分别由一条直线和两条短线组成，即“——”和“— —”。这是中国最著名的书《易经》的基本组成部分。该书主要是一部占卜用书，里边的两个符号可能分别代表“是”和“否”。莱布尼茨对这个相似也很吃惊，因为，他也深信《易经》在数学上的意义。他甚至相信古代的中国人已经掌握了二进制并在科学方面远远超过当代的中国人。

20 世纪 30 年代中期，数学家冯 • 诺依曼（美籍匈牙利人）大胆提出，将二进制作为数字计算机的数制基础。

二进制之所以能够在电子计算机上被广泛使用，是因为二进制易于以电子方式来实现。如果把“1”视为电子电路中的“ON”（有电流），把“0”视为“OFF”（无电流），那么使用二进制对于计算机电路数字化处理就非常容易了。因此，

二进制促进了二十世纪被称作第三次科技革命的重要标志之一的计算机的发明与应用。

二进制在其他学科领域中也得到了广泛的应用。19 世纪爱尔兰逻辑学家乔治·布尔将逻辑命题的思考过程转化为对符号“0”“1”的某种代数演算。

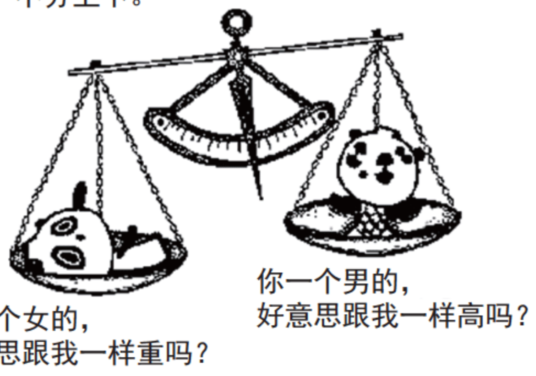
二、十六进制

二进制数太长，书写、阅读、记忆均不便。由于进制越大，数的表达长度越短，并且八进制、十六进制与二进制之间的转换直观、方便，因此用十六进制或八进制可以解决这个问题。八进制或十六进制缩短了二进制数，但保持了二进制数的表达特点。

十六进制（英文名称：Hexadecimal）同我们日常生活中的表示法并不一样。它由 0—9 的数字、A—F 的字母组成，字母不区分大小写。十六进制与十进制的对应关系是：0—9 对应 0—9 的数字；A—F 对应 10—15。十六进制的 20 表示成十进制就是：$2\times16^1+0\times16^0=32$；十进制的 32 表示成十六进制就是：20。

十六进制也是计算机中数据的一种表示方法，它对计算机理论的描述、计算机硬件电路的设计都是很有益的。比如在逻辑电路设计中，既要考虑功能的完备，又要考虑用尽可能少的硬件，因为 1 位十六进制数可以表示 4 位二进制数，所以可以用 1 个十六进制电路代替 4 个二进制电路，使硬件资源发挥尽可能大的作用。

过去相当长的一段时期内，1斤合16两，半斤就等于8两，所以人们常用“半斤八两”比喻彼此一样，不分上下。



大家都知道“半斤八两”这个成语吧，它也说明了在中国古代就曾使用过十六进制。相传，十六进制出自秦相李斯之手。传说李斯制定度量衡之前请示过秦

始皇。秦始皇给了他制定度量衡的原则——天下公平。李斯根据这四个字的笔画数（十六画）就定为十六进一。过去的秤杆上镶有秤星，满十六个秤星就进位为一市斤。民间就把这十六个秤星比为天上的十六颗星星，即北斗星（七颗）、南斗星（六颗）、福、禄、寿三星（各一颗）。北斗七星代表人的头部七窍，南斗六星代表人的六魄，并且告诫做买卖的人要诚实守信、不欺不瞒，否则，将五官不全、六神无主、洪福受损。比如，短一两无福，少二两少禄，缺三两折寿。

以上虽是传说，但反映了人文精神、人文文化与大自然的必然联系。人们观察大自然、认识大自然，都是为自身的生存和生活服务。

三、七进制

7 是自然数中的素数，以素数作为进制数具有特定的意义。相传与古代的神话以及对宇宙中星球的认识有关。以“星期”为例：

Sunday(Sun.) — Day of the Sun（太阳日，星期日）

Monday(Mon.) — Day of the Moon（月亮日）

Tuesday(Tues.) — Day of the Mars（火星日）

Wednesday(Wed.) — Day of the Mercury（水星日）

Thursday(Thur.) — Day of Jupiter（木星日）

Friday(Fri.) — Day of Venus（金星日）

Saturday(Sat.) — Day of Saturn（土星日）

分数中的七分之几，都是无限循环小数，并有其规律可循：

1/7=0.142857142857142857…，循环数为 142857。

2/7=0.285714285714285714285 7…，循环数为 142857。

3/7=0.428571428571428571428571 4…，循环数为 142857。

4/7=0.571428571428571428 57…，循环数为 142857。

5/7=0.714285714285714285 7…，循环数为 142857。

6/7=0.857142857142857142857…，循环数为 142857。

142857 是一个富有启示的数字，它与 7 的乘积是：142857×7=999999。

另外，22/7 是圆周率的一个近似值。

四、十二进制

人有 5 根手指，基于这样一个生物学的偶然事实，5、10 或 20 就成为计算方法的基础。也有人认为十二进制和人类一只手中有十二节指骨有关（不包括拇指，一根手指有三节指骨），这样方便记数。

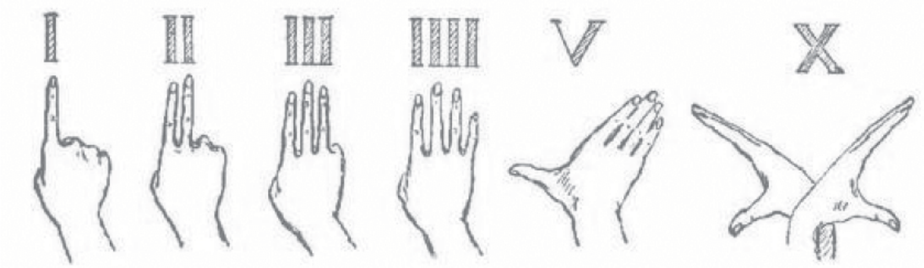
很多古老文明中都曾使用十二进制来计时，这或许是由于一年中月球绕地球转十二圈。古埃及文明就将白天、夜晚分别划分为 12 部分。从古巴比伦文明传承到西方文化中的“黄道十二宫”则将一年分为了 12 个星座。中国古代设有 12 地支，与一天的 12 个时辰对应。一个地支还对应两个节气，从而表示一年的二十四节气。同时，将地支与 12 种动物对应，便成为十二生肖，来表示以 12 年为周期的循环。

十二进制在各种度量衡中也经常被使用。如英制单位中 1 英尺等于 12 英寸，金衡制中 1 金衡磅等于 12 金衡盎司。历史上，古罗马帝国曾使用的 Uncia，既是长度单位也是货币单位，其在拉丁文中的含义是 1/12。而在推行十进制系统前，古代英国使用十二进制与二十进制混合的货币系统，其中 1 先令等于 12 便士。

使用十二进制有它的长处。12 的约数有很多，有 1、2、3、4、6、12 共 6 个；而 10 的约数只有 4 个：1、2、5、10。尤其是 10 不能用 3 除尽，而 12 却能用 3 除尽。

F. 爱默生 • 安德鲁斯（F. Emerson Andrews）在其 1935 年出版的著作《新

的数字：接受十二进制使数学更简单》中详细地提出了一种基于十二进制的体系。十二进制和十六进制一样，一般都以 A 代表 10，用 B 代表 11。而安德鲁斯在他的书中提出了一种新的方案，使用手写体的 X 和 E 来分别代表 10 和 11。原因是这两个符号能与其他的字母与数字很好地区别开，同时 X 和罗马数字的“10”很相像，而 E 则是单词 eleven（英文 11）的首字母。



五、二十进制

如果以一个人的手指和脚趾数为基础，就能产生二十进制。二十进制和十进制并列，作为十进制的辅助。

在法语里就留下了二十进制的痕迹，现在还有以下说法：

80——quatre vingts（4 个 20）

90——quatre vingt dix（4 个 20 加 10）

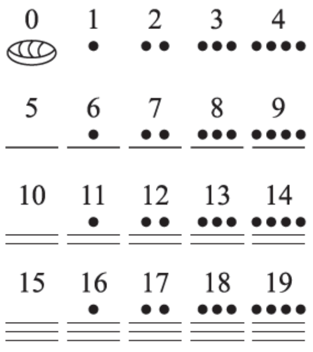
法语的 vingt 就是 20。雨果有部著名的小说《93 年》，那就是“Quatre vingt treize”（20×4+13=93）。

不仅在法语中，在英语里也保留着 score（20）这样的数词，因此也把“人生 70”说成“Three score and ten”（20×3+10=70）。林肯在葛底斯堡以那句名言“人民的，依靠人民的，为了人民的政府”结尾的演说中，是以“Four score and seven years ago”这句话开始的，意思是“87 年前”。

玛雅人创造了完全的二十进制。这种进制和他们创造的 3 个数字符号配合使用，其中“•”表示 1，“—”表示 5，贝壳表示 0，对于 5 以上的数字就

用“•”和“—”表示。玛雅族使用的是先进的定位方法，二十进制分为个位、20 位、400 位、8 000 位等。玛雅族的一个月是 20 天，一年是 18 个月，剩下的 5 天作为祭祀日。20 个部落聚在一起形成一个大部落。

格陵兰人也有使用二十进制的痕迹，它们用“一个人”代表 20，“两个人”代表 40。



玛雅人的数字

六、六十进制

古人的天文测量活动促进了几何学的发展，在这个过程中，他们经常需要等分角，二等分、三等分、四等分等（中学时候的尺规作图就是从这种古老的几何学流传下来的），当然他们要先解决等分数量较小的情况，从二、三、四、五等开始，如果采用 60 进制，由于 60 是 2，3，4，5，6 的公约数，可以等分这些角，而如果用 100 进制，三等分和六等分就不能实现。古人定角度为 60 进制的原因很朴素，就是为了测量和作图方便，做一个量角尺，就可以按照读数来把角等分成很多份。

六十进制源于公元前 3 世纪的古闪族，但把六十进制付诸实际使用的却是巴比伦王国。巴比伦王国是由许多小的部落逐渐扩大形成的一个国家，那么其有必要把各地方纷杂的度量衡统一起来。如果用 10 和 12 都能除尽的数，也就是以 10 和 12 的最小公倍数 60 为基础的话，似乎更为合适和公平。

六十进制中的数字，用 0—9、A—Z、a—x 表示，其中 A—Z 代表 10—35，a—x 代表 36—59。

与其他进位制不同，六十进制在一般运算和逻辑中并不常用，主要用于计算角度、地理坐标和时间。

一小时等于 60 分钟，而一分钟则为 60 秒。于是“3 : 23 : 17”代表三小时廿三分十七秒，当中的六十进制数字（3、23 和 17）均以十进制数字写出。

相类似的是角度，一个圆形被均分成 360 度，每一度有 60 角分，一角分等于 60 角秒。

在中国的农历中，有六十甲子的概念，以天干与地支两者经一定的组合方式搭配成六十对，为一个周期。

如果等式“2×3=10”是正确的，那么“4×5=？”。

七、定位原理与 0 的发明

巴比伦王国和埃及是历史上最早的城市国家，它们的数学水平也很接近。两国人民掌握了大量的数词，知道加减乘除的计算方法，还提出了分数的想法。但是两者也有一些不同。

埃及在实现完整的十进制方面是先进的。巴比伦王国创立的是混杂着十进制的六十进制。但是巴比伦王国的数学水平也不是在所有方面都比埃及差。那么巴比伦计数法的长处究竟在哪里呢？

圣书体	𓏺	𓎆	𓍢	𓆼	𓂭	𓆐
音译	*wʿt*	*mḏw*	*št*	*ḫ3*	*ḏbʿ*	*ḥfn*
数字	1	10	100	1000	10000	100000

埃及人对于 1，10，100，1 000 等每一个新的单位都会想出一个新的文字，而巴比伦人则分别用一些简单的楔形符号来表示 1,10,100，而 1 000，10 000 等数词则用这些楔形符号的组合来表示。这其中包含重要的数学思想：把尽量少的数字组合在一起表示尽可能大的数。节约数字的思想逐渐发展，后来还发明了 0，并最终诞生了计算用的数字，成为今天人类的共同财富。就是这些计算用的数字，按照定位的原理，仅用 10 个数字（0，1，2，3，4，5，6，7，8，9）的排列，就能够表示所有的数。

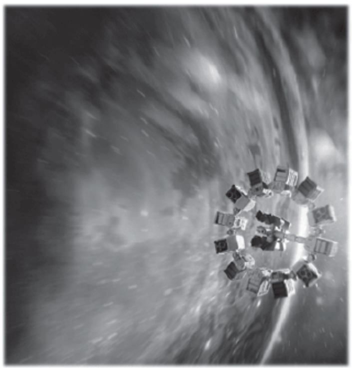
埃及人为什么不节约数字呢？原因尚不太清楚，或许是因为埃及人能够在纸莎草纤维制成的草纸上画出精巧的图画，并且可以轻而易举地在草纸上画出一些复杂的图形代表不同的数字。但巴比伦人却办不到，他们的纸就是黏土，笔就是在黏土上刻记号的简陋刮棒，用刮棒充其量也就是刻出一些楔形沟。因此，巴比伦人必须想办法用简单的楔形沟组合代表一些大的数字。

如果是使用方便的草纸使埃及的数学停止发展，而不方便的黏土却给了巴比伦数学的发展以很好的刺激，那么可以想想我们人生中的许多事情是否也是如此。

第二节　信息的使者

一、莫尔斯码

想必大家都看过由克里斯托弗·诺兰执导的原创科幻冒险电影《星际穿越》吧。这部电影是基于知名理论物理学家基普·索恩的黑洞理论经过合理演化之后，加入人物和相关情节改编而成的。大家还记得影片中的幽灵现象是什么吗？对了，就是主人公用莫尔斯密码给女儿传递的信息。



莫尔斯电码（Morse code）是一种时断时续的信号代码，通过不同的排列顺序来表达不同的英文字母、数字和标点符号。它发明于 1837 年，发明者有争议，是美国人塞缪尔·莫尔斯或者艾尔菲德·维尔。莫尔斯电码是一种早期的数字化通信形式，但是它不同于现代只使用“0”和“1”两种状态的二进制代码。莫尔斯电码由两种基本信号和不同的间隔时间组成：短促的点

信号“•”，读“滴”（Di）；保持一定时间的长信号“—”，读“嗒”（Da）。间隔时间：滴，1 秒；嗒，3 秒；嘀嗒间，1 秒；字符间，3 秒；单词间，7 秒。

莫尔斯电码可以用一种音调平稳时断时续的无线电信号来传送，通常被称为“连续波”（Continuous Wave，CW）。它可以是电报电线里的电子脉冲，也可以是一种机械的或视觉的信号（如闪光）。一般来说，任何一种能把书面字符用可变长度的信号表示的编码方式都可以称为莫尔斯电码。

A ._	J .___	S ...	2 ..___
B _...	K _._	T _	3 ...__
C _._.	L ._..	U .._	4 ...._
D _..	M __	V ..._	5 .....
E .	N _.	W .__	6 _....
F .._.	O ___	X _.._	7 __...
G __.	P .__.	Y _.__	8 ___..
H	Q __._	Z __..	9 ____.
I ..	R ._.	1 .____	0 _____

莫尔斯电码对照表

现代国际莫尔斯电码是由弗里德里希•克莱门斯•杰尔塔在 1848 年发明的，用在德国的汉堡（Hamburg）和库克斯港（Cuxhaven）之间的电报通信。1865 年之后在少量修改之后由国际电报大会在巴黎标准化，后来由国际电信联盟（ITU）统一定名为国际莫尔斯电码。今天，国际莫尔斯电码依然被使用着，虽然这几乎完全成为了业余无线电爱好者的专利。但在一些国家，业余无线电的一些波段仍然只为发送莫尔斯电码信号而预留。

莫尔斯码在早期无线电发展史上起到举足轻重的作用，是每个无线电通信者必须知道的。由于通信技术的进步，各国已于 1999 年停止使用莫尔斯码，但由于它所占的频宽最少，又具一种技术及艺术的特性，在实际生活中有广泛的应用。

在利用莫尔密码灯光求救的时候，定义：灯光长亮为“-”，灯光短亮为“•”，那么就可以通过手电筒的开关来发送各种信息，例如求救信息“SOS”的莫尔编码为：“• • • ——— • • •”，是电报中最容易发出和辨识的电码（SOS 是国际通用求救信号，这三个字母并非任何单词的缩写）。按照上面的规定即可进行灯光编码。这个编码其实非常简单，就是三短、三长、三短。

二、RSA 算法

1976 年以前，所有的加密方法都是同一种模式：

（1）甲方选择某一种加密规则，对信息进行加密；

（2）乙方使用同一种规则，对信息进行解密。

由于加密和解密使用同样规则（以下简称密钥），这被称为“对称加密算法”（symmetric-key algorithm）。

这种加密模式有一个最大弱点：甲方必须把加密规则告诉乙方，否则无法解密。保存和传递密钥，就成了最头疼的问题。另外，在金融机构和企业的世界中，要求任何银行或企业都能够和任意一方建立安全的通信，这种加密方式是完全无法实行的。

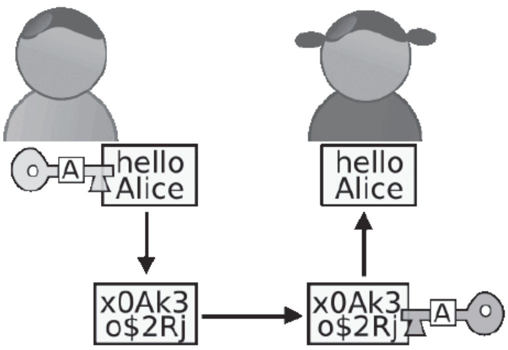
1975 年，两位美国计算机学家威特菲尔德・迪菲（Whitfield Diffie）和 马丁・赫尔曼（Martin Hellman），提出了一种崭新构想，可以在不直接传递密钥的情况下，完成解密。这被称为“Diffie-Hellman 密钥交换算法”。这个算法也启发了其他科学家，使人们认识到，加密和解密可以使用不同的规则，只要这两种规则之间存在某种对应关系即可，这样就避免了直接传递密钥。

这种新的加密模式被称为“非对称加密算法”：

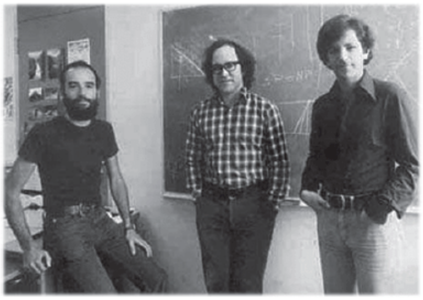
（1）乙方生成两把密钥（公钥和私钥），公钥是公开的，任何人都可以获得，私钥则是保密的；

（2）甲方获取乙方的公钥，然后用它对信息加密；

（3）乙方得到加密后的信息，用私钥解密。



如果公钥加密的信息只有私钥解得开，那么只要私钥不泄露，通信就是安全的。



1977 年，三位数学家维斯特（Rivest）、沙米尔（Shamir）和阿德曼（Adleman）设计了一种算法，可以实现非对称加密。这种算法用他们三个人的名字命名，称为 RSA 算法。从那时直到现在，RSA 算法一直是最广为使用的“非对称加密算法”。毫不夸张地说，只要有计算机网络的地方，就有 RSA 算法。

这种算法非常可靠，密钥越长，它就越难破解。根据已经披露的文献可知，目前被破解的最长 RSA 密钥是 768 个二进制位。也就是说，长度超过 768 位的密钥，还无法破解。因此可以认为，1024 位的 RSA 密钥基本安全，2048 位的密钥极其安全。

RSA 的算法涉及三个参数，n，e_1，e_2。

其中，n 是两个大质数 p，q 的积，n 用二进制表示时所占用的位数，就是所谓的密钥长度。

e_1 和 e_2 是一对相关的值，e_1 可以取任意值，但要求 e_1 与 $(p-1)\times(q-1)$ 互质；再选择 e_2，要求 $(e_2\times e_1)\text{mod}[(p-1)\times(q-1)]=1$。

(n, e_1)，(n, e_2) 就是密钥对。其中 (n, e_1) 为公钥，(n, e_2) 为私钥。

RSA 加解密的算法完全相同，设 A 为明文，B 为密文，则：

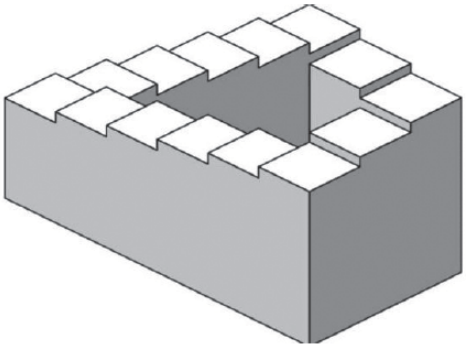
$A=B^{e_2} \bmod n$；$B=A^{e_1} \bmod n$；（公钥加密体制中，一般用公钥加密，私钥解密）

RSA 算法的核心是欧拉定理（费马小定理的延展）。将两个大的质数相乘得到一个合数非常容易，但找出一个大整数的质因子，却是一件非常困难的事情。对极大整数做因数分解的难度决定了 RSA 算法的可靠性。换言之，对一极大整数做因数分解越困难，RSA 算法越可靠。假如有人找到一种快速因数分解的算法，那么 RSA 的可靠性就会极度下降。但找到这样的算法的可能性是非常小的。目前只有寄希望于日渐成熟的量子计算机，它能有效地解决因

数分解问题，大大缩短破解的时间。

你能把 247 这个数分解为两个质数相乘吗？

第三节 数学悖论



悖论（Paradox）是一种认识矛盾，它既包括逻辑矛盾、语义矛盾，也包括思想方法上的矛盾。数学悖论作为悖论的一种，主要发生在数学研究中，指所有数学规范中发生的无法解决的认识矛盾，这种认识矛盾可以在新的数学规范中得到解决。

所谓解悖，就是运用对称逻辑思维方式发现、纠正悖论中的逻辑错误。

在古希腊时代，克利特岛的哲学家埃庇米尼得斯（约公元前 6 世纪）发现的“说谎者悖论”可以视为人们最早发现的悖论。公元前 4 世纪的欧布里德将其修改为“强化了的说谎者悖论”。在此基础上，人们构造了一个与之等价的“永恒的说谎者悖论”。埃利亚学派的代表人物芝诺提出的有关运动的四个悖论（二分法悖论、阿基里斯追龟悖论、飞矢不动悖论与运动场悖论）尤为著名，至今仍余波未息。

在中国古代哲学中也有许多悖论思想，如战国时期逻辑学家惠施的“日方

中方睨，物方生方死”；《庄子·天下篇》的“一尺之棰，日取其半，万世不竭”；《韩非子》中记载的有关“矛与盾”的悖论思想等。这些悖论式的命题，表面上看起来很荒谬，实际上却暗藏着某些辩证的思想内容。

数学史上的危机，是指数学发展中危及整个理论体系的逻辑基础的根本矛盾。这种根本性矛盾能够暴露一定发展阶段上数学体系逻辑基础的局限性，促使人们克服这种局限性，从而促进数学的发展。数学史上的三次危机都是由数学悖论引起的。

一、三次数学危机

➤ 第一次数学危机

公元前5世纪，毕达哥拉斯学派的成员希帕索斯发现：等腰直角三角形斜边与一直角边是不可公度的，它们的比不能归结为整数或整数之比。这一发现不仅严重触犯了毕达哥拉斯学派的信条，同时也冲击了当时希腊人的普遍见解，因此在当时它就直接导致了认识上的“危机”。希帕索斯的这一发现，史称“希帕索斯悖论”，从而触发了第一次数学危机。

希帕索斯的发现导致了数学史上第一个无理数“$\sqrt{2}$”的发现，促使人们进一步认识和理解无理数。但是，基于当时生产和科学技术的发展水平，毕达哥拉斯学派及以后的古希腊的数学家们没有也不可能建立严格的无理数理论，他们对无理数的问题基本上采取了回避的态度，放弃对数的算术处理，代之以几何处理，从而开始了几何优先发展的时期，在此后两千年间，希腊的几何学

几乎成了全部数学的基础。当然，这种做法，对数学的发展也产生了不利的影响。

希帕索斯的发现，说明直觉和经验不一定靠得住，而推理和证明才是可靠的，这就导致了亚里士多德的逻辑体系和欧几里得几何体系的建立。

➢ 第二次数学危机

贝克莱

1734 年，英国大主教贝克莱发表了一本书，对当时的微积分学说进行了猛烈的抨击。他说牛顿先认为无穷小量不是零，然后又让它等于零，这违背了背反律，并且所得到的流数实际上是 0/0，即“依靠双重错误得到了虽然不科学但却正确的结果”，这是因为错误互相抵偿的缘故。这在数学史上称为“贝克莱悖论”。这一悖论的发现，在当时引起了一定的思想混乱，导致了数学史上的第二次危机，引起了持续 200 多年的微积分基础理论的争论。

“贝克莱悖论”提出以后，许多著名数学家从各种不同的角度进行研究、探索，试图把微积分重新建立在可靠的基础之上。法国数学家柯西是数学分析的集大成者，通过《分析教程》（1821）、《无穷小计算讲义》（1823）、《无穷小计算在几何中的应用》（1826）这几部著作，柯西建立起以极限为基础的现代微积分体系。1860 年，魏尔斯特拉斯提出用递增有界数列来定义无理数；1872 年，戴德金提出用分割来定义无理数。1883 年，康托尔提出用基本序列来定义无理数。这些定义，从不同的侧面深刻揭示了无理数的本质，从而建立了严格的实数理论，彻底消除了希帕索斯悖论，把极限理论建立在严格的实数理论基础上，进而导致集合论的诞生。

➢ 第三次数学危机

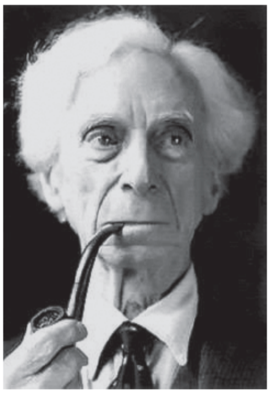
法国著名数学家庞加莱（1854—1912）于 1900 年在巴黎召开的国际数学家会议上夸耀道：“现在可以说，（数学）绝对的严密性已经达到了。”然而，

事隔不到两年，英国著名数理逻辑学家和哲学家罗素（1872—1970）即宣布了一条惊人的消息：集合论是自相矛盾的，并不存在什么绝对的严密性，史称“罗素悖论”。1918年，罗素把这个悖论通俗化，称为“理发师悖论”。罗素悖论的发现，无异于晴天霹雳，把人们从美梦中惊醒。罗素悖论以及集合论中其他一些悖论，深入到集合论的理论基础之中，从根本上危及了整个数学体系的确定性和严密性。于是在数学和逻辑学界引起了一场轩然大波，形成了数学史上的第三次危机。

庞加莱

为了解决第三次数学危机，数学家们进行了不同的努力。由于他们解决问题的出发点不同，所遵循的途径不同，所以在20世纪初就形成了不同的数学哲学流派，这就是以罗素为首的逻辑主义学派、以布劳威尔为首的直觉主义学派和以希尔伯特为首的形式主义学派。这三大学派的形成与发展，把数学基础理论研究推向了一个新的阶段。

美国杰出数学家哥德尔于20世纪30年代提出了不完全性定理。哥德尔定理是数理逻辑、人工智能、集合论的基石，是数学史上的一座里程碑。美国著名数学家冯·诺伊曼说过：“哥德尔在现代逻辑中的成就是非凡的、不朽的——它的不朽甚至超过了纪念碑，它是一座里程碑，在可以望见的地方和可以望见的未来中永远存在的纪念碑。”


罗素

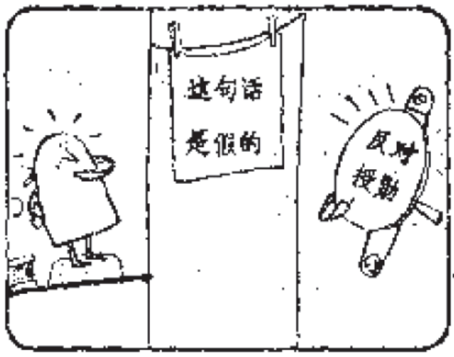
第三次数学危机的产物——数理逻辑的发展与一批现代数学的产生。时至今日，第三次数学危机还不能说已从根本上消除，因为数学基础和数理逻辑的许多重要课题还未能从根本上得到解决。然而，人们正向根本解决的目标逐渐接近。可以预料，在这个过程中还将产生许多新的重要成果。

发现和提出悖论并加以研究，对于数学基础、逻辑学和哲学都有重要意

义。正如塔斯基所指出的："必须强调的是，悖论在建立现代演绎科学的基础上占有一个特别重要的地位。正如集合论的悖论，正如罗素悖论成为逻辑和数学相容性形式化的起点一样，撒谎者悖论及其语义学悖论导致了理论语义学的发展。"

二、著名的数学悖论

➤ 说谎者悖论



公元前 6 世纪，古希腊克利特岛的哲学家埃庇米尼得斯 (Epimenides) 说了一句很有名的话："所有克利特人都说谎"。这句话有名是因为它是一个经典悖论，即"说谎者悖论"。因为如果埃庇米尼得斯所言为真，那么克利特人就全都是说谎者，身为克利特人之一的埃庇米尼得斯自然也不例外，于是他所说的这句话应为谎言，但这跟先前假设此言为真相矛盾。又假设此言为假，那么也就是说所有克利特人都不说谎，自己也是克利特人的埃庇米尼得斯就不是在说谎，就是说这句话是真的，但如果这句话是真的，又会产生矛盾。"说谎者悖论"至今仍困扰着数学家和逻辑学家。

公元前 4 世纪，希腊哲学家又提出了一个悖论：我现在正在说的这句话是假的。说谎者悖论有许多形式。例如，我预言：你下面要讲的话是"不"，对不对？用"是"或"不是"来回答。又如，我的下一句话是错（对）的，我的上一句话是对（错）的。

有不少逻辑学家提出了一些解决方案，但是至今没有形成一个公认的方法。哲学家提出一个命题并非心血来潮，它蕴含了人们对终极存在的探索以及对矛

盾意义的反思。其实，说谎者悖论根源在于混淆了“对与错”同“真与假”两对范畴。“对与错”同“真与假”是对应关系，而非等同关系——“对与错”是内容是否符合事实，“真与假”只是形式上表述真假。说谎者悖论是由于混淆了这两对范畴，因而混淆了思维内容与思维形式。

➢ 理发师悖论（罗素悖论）

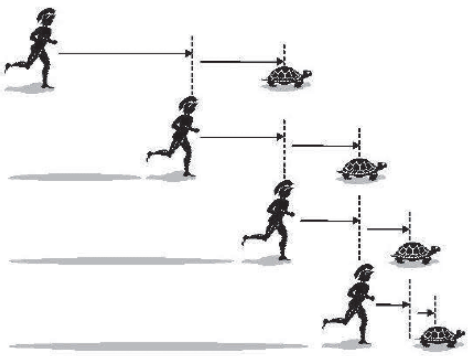
在某个城市中有一位理发师，他的广告词：“本人的理发技艺十分高超，誉满全城。我将为本城所有不给自己刮脸的人刮脸，我也只给这些人刮脸。我对各位表示热诚欢迎！”来找他刮脸的人络绎不绝，自然都是那些不给自己刮脸的人。可是，有一天，这位理发师从镜子里看见自己的胡子长了，他本能地抓起了剃刀，你们看他能不能给他自己刮脸呢？如果他不给自己刮脸，他就属于“不给自己刮脸的人”，他就要给自己刮脸；而如果他给自己刮脸呢？他又属于“给自己刮脸的人”，他就不该给自己刮脸。

理发师要给“本城所有不给自己刮脸的人刮脸”这个广告语中的对象很明确：就是他可以为之服务并且可以从对方身上盈利的人，所以广告语中“本城所有不给自己刮脸的人”这个集合显然不包括他自己。这个悖论之所以会成为悖论是因为混淆了这个广告语本意所指的对象和这个广告语本意不包括的对象的区别，把这个广告语本意所指的不包括作广告本人的对象集合，抽象化为也包括制作广告的人本身。

在数学中，集合论的严密性是数学得以“绝对严格”的基础，这个悖论动摇了数学“绝对严格”的基础，引发了数学史上的第三次危机。

➢ 芝诺悖论——阿基里斯与乌龟

阿基里斯（Achilles）是希腊神话中善跑的英雄。公元前 5 世纪，芝诺用他的无穷、连续以及部分和的知识，引发出以下著名的悖论：他提出让阿基里斯与乌龟之间举行一场赛跑，并让乌龟在阿基里斯前面 1 000 米开始。假定阿基里斯能够跑得比乌龟快 10 倍。比赛开始，追者首先必须到达被追者的出发点，当阿基里斯跑了 1 000 米时，乌龟仍前于他 100 米；当阿基里斯跑了下一个 100 米时，乌龟依然前于他 10 米……阿基里斯和乌龟的距离可以无限地缩小，但阿基里斯永远追不上乌龟。



这个悖论是以阿基里斯不可能超过乌龟、只能跟在乌龟后面为立论前提。因为阿基里斯只能跟在乌龟后面追（阿基里斯永远追不上乌龟），所以阿基里斯永远追不上乌龟。这是犯了把结论当预设前提的逻辑错误——循环论证的逻辑错误。芝诺悖论归根结底是一个时间的问题。譬如说有 1 秒的时间，我们要先过一半即 1/2 秒，再过一半即 1/4 秒，再过一半即 1/8 秒，这样下去我们好像永远都过不完这 1 秒。但其实时间的流动是匀速的，1/2、1/4、1/8 秒，时间越来越短，看上去无穷无尽，其实加起来只是个常数而已，也就是 1 秒。所以说，芝诺的悖论其实是不存在的。

➢ 谷堆悖论

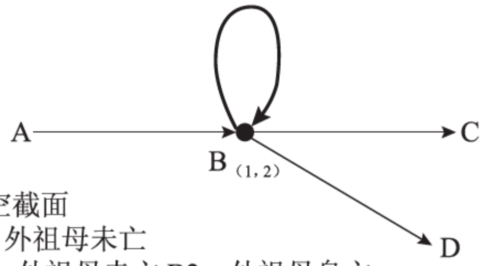
如果 1 粒谷子落地不能形成谷堆，2 粒谷子落地不能形成谷堆，3 粒谷子落地也不能形成谷堆，依此类推，无论多少粒谷子落地都不能形成谷堆。这就是令整个古希腊震惊一时的“谷堆悖论”。

从真实的前提出发，用可以接受的推理，但结论却是明显错误的。它说明

定义“堆”缺少明确的边界。它不同于三段论式的多前提推理，在一个前提的连续积累中形成悖论。这个悖论的根源在于：否认量变会引起质变，否认谷粒的量变会产生“堆”的质变。解决它的办法就是引进一个模糊的“度”。谷粒的量变到产生“堆”的质变中间有个“度”，这个度只能通过直觉来把握，不可能通过对谷粒量的增加的数学计算来把握。

“谷堆悖论”之初是一个游戏：你可以把 1 粒谷子说成是堆吗？不能；你可以把 2 粒谷子说成是堆吗？不能；你可以把 3 粒谷子说成是堆吗？不能。但是你迟早会承认一个谷堆的存在。你从哪里区分它们？这只能凭你的直觉，而不能通过数学计算。

➢ 外祖母悖论



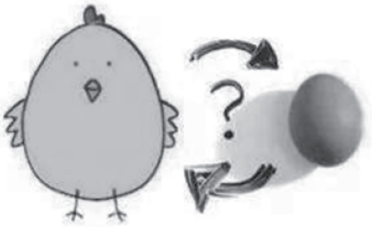
时空截面
A：外祖母未亡
B1：外祖母未亡 B2：外祖母身亡
C：“我”存在
D：“我”不存在

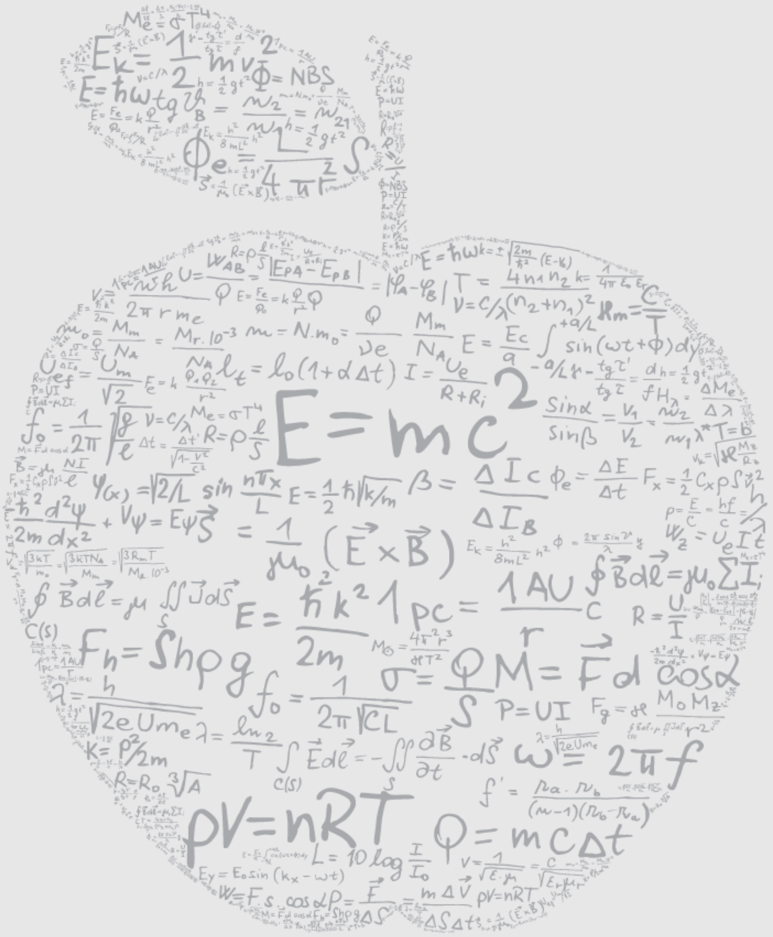
英国科学家霍金设想人有可能乘坐时速超过光速的宇宙飞船——“时间机器”通过时间隧道回到过去，甚至回到外祖母怀他母亲之前；因此人有可能在外祖母怀他母亲之前杀死外祖母；人如果在外祖母怀他母亲之前杀死外祖母，外祖母就不可能生这个人的母亲，这个人也就不可能出世；现在这个人不但出世了，而且还杀死了他的外祖母，这就产生了悖论。

参照系——“人可以追光”只能是相对于人而言，因而具有主观的特征；而惯性系——“时间不可倒流”是客观存在的。整个宇宙是一个惯性系，不以人的意识为转移。这个悖论的逻辑错误根源于混淆了参照系与惯性系，把宇宙惯性系本身不可能发生的事情因为混淆了参照系与惯性系而强加给宇宙惯性系，得出错误的结论。即使人可以乘坐时速超过光速的“时间机器”通过“时间隧道”进行超越光速的时间旅行，人也只能看到死去的亲人生前活动的光影，不可能与死去的亲人见面并和死去的亲人对话，就像人可以通过录像看过去发

生的事情不等于回到过去一样。人不可能在外祖母怀他母亲之前杀死外祖母，就像人不可能改变过去已经发生过的事。“世界上没有后悔药”指的就是时间是不可倒流的，不能把追光和时间倒流混为一谈。

“先有鸡”还是“先有蛋”？



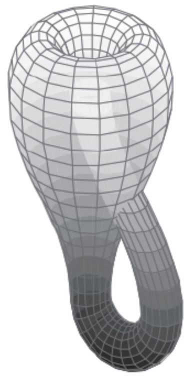


第七章

数学之奇

第一节 神奇的克莱因瓶

1882 年，著名数学家菲利克斯 • 克莱因（Felix Klein）发现了后来以他的名字命名的著名“瓶子”——克莱因瓶。它是一个像球面那样封闭的曲面，但其却只有一个面。在右图中我们看到，克莱因瓶的确像一个瓶子，但是它没有瓶底，它的瓶颈被拉长，然后似乎是穿过了瓶壁，最后瓶颈和瓶底圈连在了一起。如果瓶颈不穿过瓶壁而从另一边和瓶底圈相连的话，我们就会得到一个轮胎面（环面）。



克莱因瓶

我们可以说一个球有两个面——外表面和内表面，如果一只蚂蚁在一个球的外表面上爬行，那么如果它不在球面上咬一个洞，就无法爬到内表面去。轮胎面（环面）也是一样，有内外表面之分。但克莱因瓶却不同，我们很容易想象，一只爬在“瓶外”的蚂蚁，可以轻松地通过瓶颈而爬到“瓶内”去——事实上克莱因瓶并无内外之分！

如果观察克莱因瓶，有一点似乎令人困惑——克莱因瓶的瓶颈和瓶身是相交的，换句话说，瓶颈上的某些点和瓶壁上的某些点占据了三维空间中的同一个位置。但是事实并非如此。事实是：克莱因瓶是一个在四维空间中才可能真正表现出来的曲面。如果我们一定要把它表现在我们生活的三维空间中，只好把它表现得似乎是自己和自己相交一样。事实上，克莱因瓶的瓶颈是穿过了第四维空间再和瓶底圈连起来的，并不穿过瓶壁。

在二维看似穿过自身的绳子

用扭结来打个比方，如右图所示，如果把

它看作平面上的曲线的话，那么它似乎自身相交，再一看似乎又断成了三截。但其实这个图形是三维空间中的曲线。它并不和自己相交，而是连续不断的一条曲线。在平面上一条曲线自然做不到这样，但是如果有第三维的话，它就可以穿过第三维来避开和自己相交。只是因为我们要把它画在二维平面上时，只好把它画成相交或者断裂了的样子。

克莱因瓶也一样，我们可以把它理解成处于四维空间中的曲面。在我们这个三维空间中，即使是最高明的能工巧匠，也不得不把它做成自身相交的模样；就好像最高明的画家，在纸上画扭结的时候也不得不把它们画成自身相交的模样。

有趣的是，如果把克莱因瓶沿着它的对称线切下去，竟会得到两个莫比乌斯环。把一条纸带的一端扭 180°，再和另一端粘起来就得到一条莫比乌斯带的模型，如右图所示。

莫比乌斯环

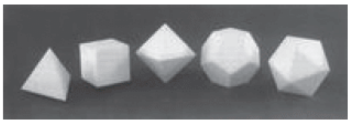
如果球面上有一些花纹（如圆形花纹），把它吹胀了，只要不破，虽然花纹的形状有变化，如圆形可能变成椭圆，其花纹的长度、面积、共线性等都会变化，但气球和吹胀的气球面上的花纹之间仍有一一对应关系并且邻近的点仍变成邻近的点，这样的变换便是拓扑变换或同胚。

如果在圆的内部画一点，不管你怎么拉或吹胀这一气球，点总是在圆的内部，这便是拓扑学的一种简单的不变性质。

以上现象显示出几何图形的一类新的几何性质。这类性质与几何图形的大小、形状以及所含线段的曲直等都无关，它们不能用欧氏几何的方法来处理，它们的特点是：在“弹性变形”下保持不变。欧拉将研究这类新问题的几何学称为“位置几何学”，人们则通俗地叫它“橡皮几何学”。后来，这门数学分支被正式命名为“拓扑学”。

拓扑英文名是“Topology”，直译是地志学，最早指研究地形、地貌相类似的有关学科。拓扑学是在几何学与集合论里发展出来的学科，研究空间、维

度与变换等概念。这些词汇的来源可追溯至莱布尼茨在 17 世纪提出“位置的几何学”和“位相分析”的说法。欧拉的柯尼斯堡七桥问题与欧拉示性数被认为是该领域最初的定理。

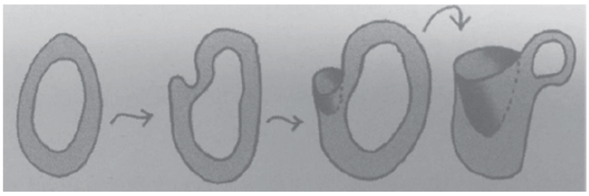


欧拉公式：如果一个凸多面体的顶点数是 V、棱数是 E、面数是 F，那么它们总有这样的关系：$F+V-E=2$。我们把 $(F+V-E)$ 称为欧拉示性数。根据此公式，可以得出这样一个有趣的事实：只存在五种正多面体。它们是正四面体、正六面体、正八面体、正十二面体、正二十面体。

如果一个立方体有一个“管道”穿过它，那么它还是多面体吗？对于这个形状，$V=16$，$E=32$，$F=16$，$F+V-E=0$，此时欧拉公式不再成立。

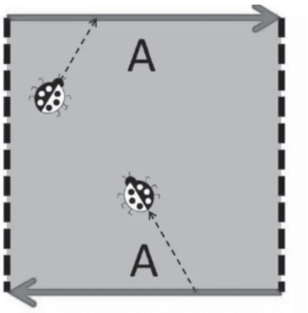
在拓扑学里不讨论两个图形全等的概念，但是讨论拓扑等价的概念。比如，圆和方形、三角形的形状、大小不同，但在拓扑变换下，它们都是等价图形；足球和橄榄球，也是等价的——从拓扑学的角度看，它们的拓扑结构是完全一样的。而游泳圈的表面和足球的表面则有不同的拓扑性质，比如游泳圈中间有个“洞”。在拓扑学中，足球所代表的空间叫球面，游泳圈所代表的空间叫环面，球面和环面是“不同”的空间。把球面和环面的差异用数字表示便是欧拉示性数。球面的欧拉示性数为 2，环面的欧拉示性数为 0。欧拉示性数不同的表面是无法让其发生连续变化的。

例如，甜甜圈是一个具有单孔的曲面。咖啡杯也一样，该孔以杯把的形式出现，以下显示出从一个甜甜圈到咖啡杯的形变过程。



甜甜圈到咖啡杯的形变过程

“连通性”是最本质的拓扑性质。德国数学家莫比乌斯（1790—1868）在1858 年发现了莫比乌斯曲面。这种曲面不能用不同的颜色来涂满。



小虫爬行轨迹

在数学上，称克莱因瓶、莫比乌斯曲面为“不可定向的”空间。而我们通常讲的球面或轮胎面，这样的空间是可定向的。如何理解“不可定向”呢？

我们将一条纸带的两端分别画上方向相反的两个箭头，再把纸带的一端扭 180°，和另一端粘起来做成一条莫比乌斯带（此时两个箭头方向一致）。设想有一只小虫爬过带有箭头的边界，转移到另一侧继续按原方向爬行。我们再展开纸带来看小虫的爬行轨迹（见右图），你会发现小虫的爬行方向发生了改变。由于对小虫来说并没有左右之分，因此这个曲面是不可定向的。

1904 年，法国数学家亨利 • 庞加莱提出了一个拓扑学的猜想：

“任何一个单连通的，闭的三维流形一定同胚于一个三维的球面。”

简单地说，如果一个三维空间没有孔（单联通的），那么它一定是三维球面。后来，这个猜想被推广至三维以上空间，被称为“高维庞加莱猜想”。

庞加莱猜想是克雷数学研究所悬赏的七个“千禧年大奖难题”之一。其中三维的情形被俄罗斯数学家格里戈里 • 佩雷尔曼于 2003 年前后证明。2006 年，数学界最终确认佩雷尔曼的证明解决了庞加莱猜想。庞加莱猜想是一个拓扑学中带有基本意义的命题，将有助于人类更好地研究三维空间，其带来的结果将会加深人们对流形性质的认识。

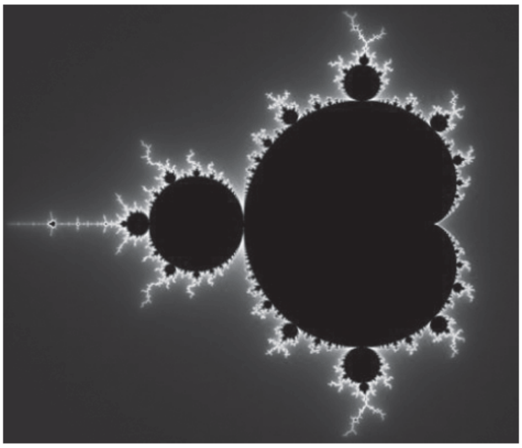
七个“千禧难题”

2000 年 5 月 24 日，美国克雷数学研究所的科学顾问委员会列出了七个“千禧年大奖难题”。它们分别是：庞加莱猜想、P 对 NP 问题、霍奇猜想、黎曼假设、杨 - 米尔斯理论存在性与质量缺口、纳维 - 斯托克斯方程存在性与光滑性、BSD 猜想。

这七道问题被研究所认为是“重要的经典问题，经许多年仍未解决。”克雷数学研究所的董事会决定建立七百万美元的大奖基金，每个问题的解决都可获得百万美元的奖励。

如右图所示，如果不打开绳结、不割断绳子，是不是可以把图中的两个人解开？

第二节　迷人的自相似图形



曼德尔布罗特集合

1980 年 3 月，位于纽约州约克敦海茨的 IBM 研发中心，一台最先进的电脑主机正向一个古老的泰克打印机传输指令。打印机按照主机指令在一张白纸上的奇怪位置打点，当它停止敲打后，其打印结果就像是在床单上撒下了一把尘土。贝努克 • 曼德尔布罗特简直不敢相信他的眼睛。他知道这个图案非常重要，但它到底是什么呢？在他面前慢慢呈现的图像犹如显影池里逐渐显现的黑白照片。这是人们第一次瞥见分形世界中的图像——曼德尔布罗特集合。

产生曼德尔布罗特集合的公式可以简单表示为：x^2+c

当 c=0.5 时，从 x=0 开始迭代，结果会越来越大。当取 c=−0.5 时，经过几次迭代后，振荡会稳定在 −0.366 0 附近。曼德尔布罗特集合是结果不会逃逸至无穷大的所有 c 值。

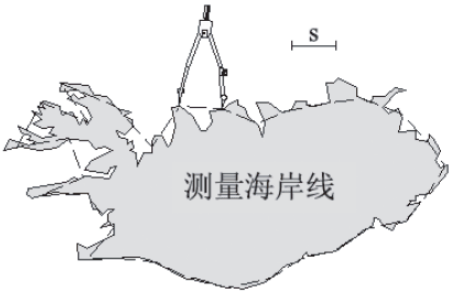
曼德尔布罗特集合具有自相似性，如果放大这个集合，你无法确定放大的倍数，只能看到更多的曼德尔布罗特集。

分形（Fractal）一词，是曼德尔布罗特创造出来的，据说是在一个寂静夏天的夜晚，他在冥思苦想之余偶翻他儿子的拉丁文字典时突然想到的。他想用“分形”一词来描述自然界中传统欧几里得几何学所不能描述的一大类复杂无规的几何对象。例如，弯弯曲曲的海岸线、起伏不平的山脉、粗糙不堪的断面、变幻无常的浮云、九曲回肠的河流、纵横交错的血管、令人眼花缭乱的满天繁星等。

1973 年，曼德尔布罗特在法兰西学院讲课时，首次提出了分维和分形的设想。所谓分形，就是粗糙或零碎的几何形状，可以分成数个部分，且每一部分都是整体缩小尺寸的形状。分形能够用数学描述现实世界中更常见的表面上看似没有规律的粗糙形状和事物，其在各学科中都有广泛应用。

与数学中的大多数事情一样，新发现很少是完全革新的。纵观历史，在曼德尔布罗特发现曼德尔布罗特集的 100 年前，昂利 • 庞加莱和阿兹 • 克黎等数学家们已经对这个想法有了初步的认识。不幸的是他们在当时没有足够的计算能力进行进一步的研究。

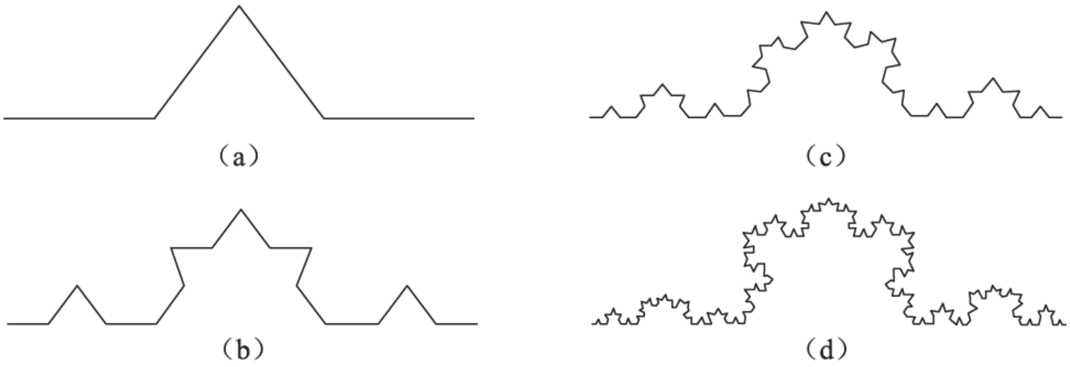
20 世纪 60 年代，加拿大化学家凯伊研究炭黑颗粒的现状与尺寸，炭黑颗粒的边界近似椭圆，为了掌握这个近似所带来的误差，他认为使用高倍显微镜应该可以得到更精确的周长值。但结果出乎意料，用更高倍数的显微镜可看到更详细的细节，但周长却在无限地增长。一个有限的图形周长会无限地增长，这在几何上难以想象！后来，他了解到在几十年前一位地理学家理查逊在测量大不列颠海岸线的长度时，遇到类似问题，越是使用公认的提高精度的精确方法（尽量设多的测量点，用尽可能小的折线代替海岸曲线）去测量，得到的海岸线就越是无限制地增长。



一、科赫曲线

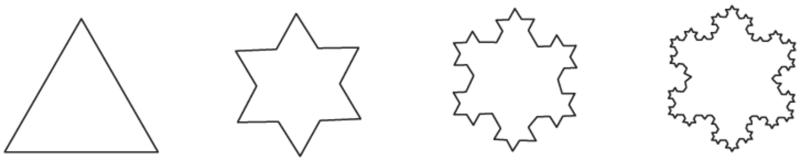
其实早在 1906 年，瑞典数学家海里格・冯・科赫在研究构造连续而不可微函数时，已提出了如何构造能够描述雪花的曲线——科赫曲线。

将一条线段去掉其中间的 1/3，然后用此为长的等边三角形的两条边（它的长度为所给线段长的 1/3）去代替，不断重复上述步骤可得到科赫曲线。



科赫曲线

如果将所给线段换成一个等边三角形，然后在等边三角形每条边上实施上述变换，便可得到科赫雪花图案。



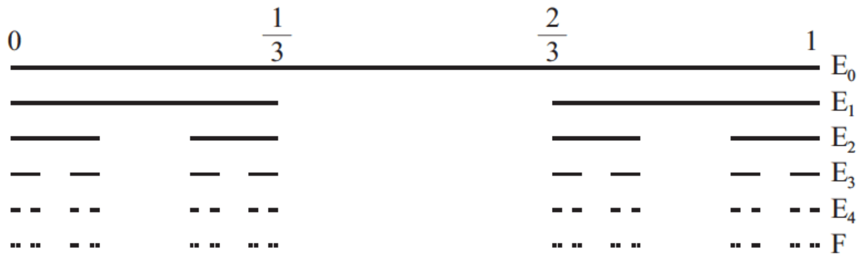
科赫雪花图

二、康托尔集

集合论的创始人康托尔（1845—1918）为了讨论三角级数的唯一性问题，于 1872 年曾构造一个抽象、奇异的集合——康托尔集。

将一个长度为 1 的线段三等分，然后去掉其中的一段；再将剩下的两段分别三等分后，各去掉中间一段，如此下去，将得到一些离散的细微线段的集

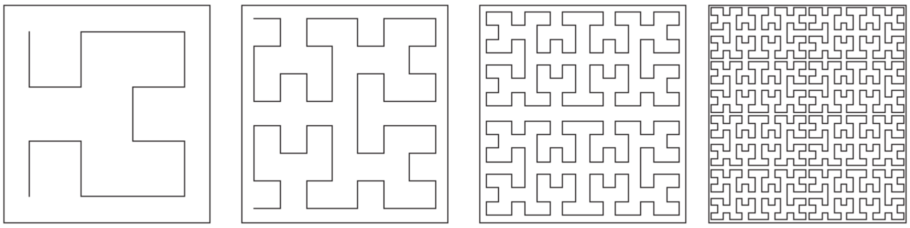
合——康托尔集（又称康托尔粉尘）。



康托尔粉尘

三、皮亚诺曲线

1890 年意大利数学家、逻辑学家皮亚诺（1858—1932）构造了能够填满整个平面的曲线——皮亚诺曲线，具体构造如下图所示。这显然也是一条“怪异”的曲线：它本身是一条曲线（故面积应该为 0），但却可以填满一个正方形（它的面积显然不为 0）。



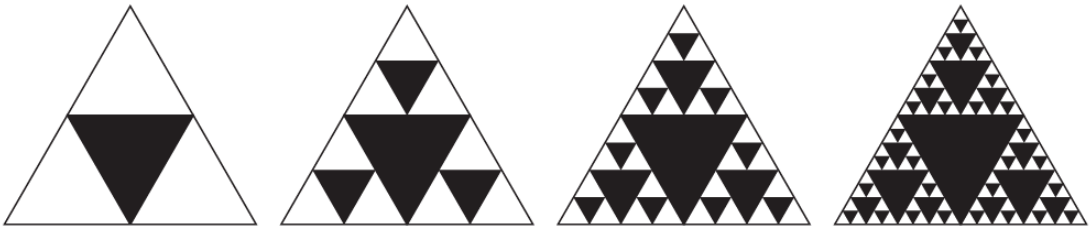
皮亚诺曲线

四、谢尔宾斯基衬垫、地毯、海绵

1915 年，波兰数学家谢尔宾斯基（1882—1969）也制造出两件绝妙的“艺术品”——衬垫和地毯。

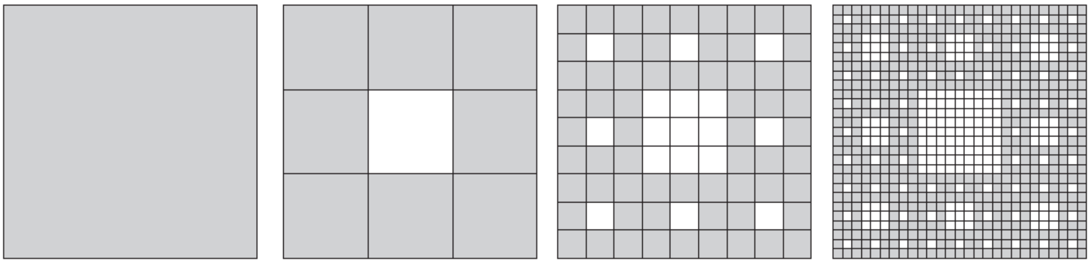
将边长为 1 的等边三角形区域，均分成四个小等边三角形，去掉中间一个，然后再对剩下的每个小等边三角形进行相同的操作，这样的操作不断继续下去

直到无穷，最终所得的极限图形称为谢尔宾斯基衬垫。谢尔宾斯基衬垫的极限图形的面积趋于零，而小图形的数目趋于无穷，作为小图形的边的线段数目趋于无穷，实际上是一个线集。从某种意义上讲，谢尔宾斯基衬垫实际上是康托尔粉尘集在二维空间的拓展。



谢尔宾斯基衬垫

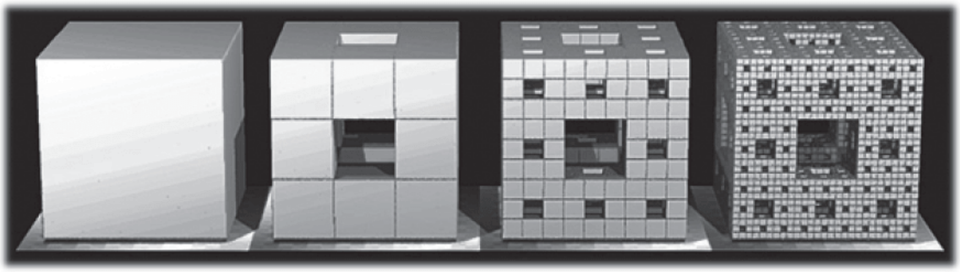
此外，谢尔宾斯基还用类似的方法构造了谢尔宾斯基地毯。将一个实心正方形划分为 9 个小正方形，去掉中间的小正方形，再对余下的小正方形重复这一操作便能得到谢尔宾斯基地毯。同样，它的面积趋于 0，而线的长度区域无穷大。如下图所示：



谢尔宾斯基地毯

接着，谢尔宾斯基又将他的“杰作”拓展推向了三维空间：

从一个正方体开始，把正方体的每一个面分成 9 个正方形。这将把正方体分成 27 个小正方体，像魔方一样。把每一面的中间的正方体去掉，把最中心的正方体也去掉，留下 20 个正方体。然后对剩下的 20 个小正方体中的每一个实施上述操作，如此下去……人们把这个千“窗”百孔的正方体（它就像人们常见的海绵）称为“门格－谢尔宾斯基海绵”（它首先由奥地利数学家卡尔•门格在 1926 年描述）。它的表面积为无穷大，而它的体积趋于 0。



门格－谢尔宾斯基海绵

五、维数与分维

达·芬奇在他的笔记中写道："绘画科学首先开始于点，其次是线，再次出现的是面，最后是面覆盖着的立体。"在达·芬奇的层次结构中，点是零维的，线是一维的，面是两维的，而空间是三维的。

爱因斯坦认为时间与空间构成了一个四维连续体，我们生活在一个（x，y，z，t）的四维世界中。

公元前300多年，欧几里得描绘了三维世界。1884年，英国出版了一本《二维国》的畅销书，在这个国度里人们都生活在二维平面中。人们看不到三角形、正方形或者圆形等形状，因为他们无法跳到第三维中观察。他们的视觉严重受限，他们很难理解第三维，就像我们很难理解第四维一样。

与物理多维空间不同的是，在数学中，高于三维的空间是没有任何问题的。比如，人自身就是一个多维事物，一个人的"坐标"远多于3个。我们可以使用（a，b，c，d，e，f，g，h）来代表年龄、身高、体重、性别、鞋码、眼球颜色、发色、国籍等。

1948年，美国数学家胡尔维茨（Hurewicz）和沃尔曼（Wallman）出版了一本书——《维数论》，以一种十分精确、直观的方法给出了维数的定义，比较完整地论述了截至当时有关的维数定义和有关问题。

费利克斯·豪斯多夫（Hausdorff）对维的看法非常独特，他的观点涉及缩放。

他于 1918 年提出了“豪斯多夫维”的定义：

在三维空间里任意给了一个几何对象 G，把 G 放大到一个相似的图形 G'，设放大的比例数是 s，如果体积放大了 n 倍，我们用 d 把 n 和 s 联系起来，$n=s^d$，d 称为几何体 G 的维数。

也就是说，$d=\lg n/\lg s=$ 体积放大倍数的对数 / 边长放大倍数的对数

通过豪斯多夫维可以给一个任意复杂的点集合，如分形（Fractal）赋予一个维度。对于简单的几何目标，如线、长方形、长方体等豪斯多夫维等同于它们通常的几何维度或者拓扑维度。通常来说，一个物体的豪斯多夫维不像拓扑维度一样总是一个自然数而可能会是一个非整的有理数或者无理数。

为什么前面提到的科赫曲线、康托尔集、皮亚诺曲线，以及谢尔宾斯基衬垫、地毯、海绵等图形那么怪异、而又有自相似性。因为这些形状的豪斯多夫维度不再是整数，而是分数（分维）。所以说，**分形图就是维数为分数的图形。**

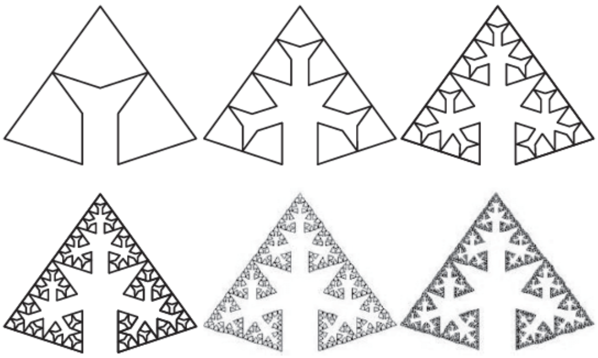
就拿科赫曲线来说，如果科赫曲线的基本单位按比例放大 3 倍，它的周长变成之前的 4 倍。按照豪斯多夫维数的定义，$d=\lg 4/\lg 3=1.262$。

同样地，我们可计算出前述诸图形（集合）的豪斯多夫维数（见下表）。

分 形 图	维　数
康托尔集	$d=\lg 2/\lg 3=0.631$
科赫曲线	$d=\lg 4/\lg 3=1.262$
皮亚诺曲线	$d=\lg 4/\lg 2=2$
谢尔宾斯基衬垫	$d=\lg 3/\lg 2=1.585$
谢尔宾斯基地毯	$d=\lg 8/\lg 3=1.893$
谢尔宾斯基海绵	$d=\lg 20/\lg 3=2.726$

从上表中我们容易想象出：维数为 1 ～ 2 的曲线维数表示它们弯曲程度和能填满平面的能力；2 ～ 3 维曲面维数表现它们的复杂程度和能够填满空间的能力。

右边分形图的豪斯多夫维数是多少？



六、分形图是高效率的

曾经被认为是“数学上的污点”的分形图形重新回到研究者的视野中。它已在数学、物理、天文、生化、地理、医学、气象、材料乃至经济学等诸多领域被广泛应用，且取得了异乎寻常的成就。

其实，在大自然中分形图比比皆是。比如，大家经常吃的花椰菜。一颗大花椰菜就像一棵树，如果将其分割，分割部分就会变成一小棵树的样子，和原来的大花椰菜看起来很相似吧？

还有随处可见的树枝，从树干上拔下来树枝的样子，和从一根树枝上再拔下来树枝的样子都何其相似。

我们再来看看蕨类植物的叶子。拿一大枝叶子来看时，难道不会觉得它叶子的分布状况和构成这片枝叶的小枝叶放大的样子非常相似吗？

为什么在自然界中往往会出现这种自相似的形态呢？事实上，这些分形图形的构造正是大自然的伟大智慧！原因主要有两个：

- 生成规则（模式）非常简单，易复制；
- 依此模式可以获得较大的长度或表面积。

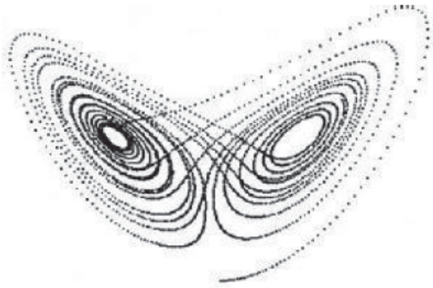
例如，树木都希望所有叶子能尽可能多地沐浴到阳光。当树枝以分形形式分布时，附着在树枝上的叶子能晒到阳光的表面积就会特别大。不管是蕨类植物还是花椰菜都是一样。

我们的身体中也存在“分形图形”！一个典型的例子是“血管”的分支现象。总的来说，就是从大动脉和大静脉上渐渐分出无数的毛细血管，这些纤细的毛细血管流遍人体的各个角落，这种分支现象从整体看来就是呈近似图形状的。那么，血管的长度到底共有多长呢？10万公里！相当于地球赤道的2周半。

我们的身体中居然存在如此惊人的血管长度，血液就在其中汹涌地奔流着。靠着这些血管，我们身体各处的细胞都能流通血液、吸收营养、维持生命。这都多亏了分形图形。

日常生活中常见的近似图形的例子还有很多，如麦穗的样子、海岸线的样子、地面凹凸不平的样子、孔雀羽毛的样子等。除此之外，还有一些出乎大家意料的例子，如选举投票的人口变动、股票的变动等。

第三节　美丽的蝴蝶



1961年的某一天，麻省理工学院的气象学家爱德华·洛伦兹在他的古董级计算机画图的间隙去喝了一杯咖啡，回来后看到的结果令他大吃一惊：原本的气象图变成了一张无法识别的图像。

经过思索，他想起输入的初始值的确有一个微小的变化：之前保留小数点后6位，但是这次只保留了小数点后3位。为了解释该差异现象，他使用了短语“蝴蝶效应”。从此他将研究兴趣转向数学。

洛伦兹在解释空气系统理论时说，亚马孙雨林一只蝴蝶翅膀偶尔振动，也许两周后就会引起美国得克萨斯州的一场龙卷风，这就是“蝴蝶效应”：比喻初始条件十分微小的变化经过不断放大，对其未来状态会造成极其巨大的差别。

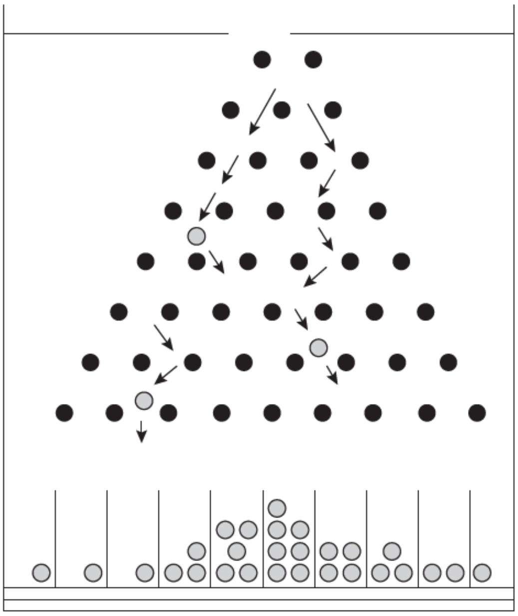
1812 年法国科学家拉普拉斯发表了一篇关于确定性宇宙的短文：如果在某一特定时刻，宇宙中所有物体的位置和速度，以及作用在它们上面的力是已知的，那么，这些量值在其后的所有时刻都可以被精确地推算出来。宇宙以及宇宙中的所有物体都是完全确定的。

拉普拉斯所坚信的是：初始条件的微小差异意味着结果的微小差异。例如，一个赛跑选手如果在发令枪响 1/10 秒后才起跑，那么他冲过终点线的时刻也必然要比往常晚 1/10 秒。

然而，世界是确定性的吗？“蝴蝶效应”告诉我们，现实世界远比这错综复杂得多！

任何事物发展均存在定数与变数，事物在发展过程中其发展轨迹有规律可循，同时也存在不可测的“变数”，往往还会适得其反，一个微小的变化能影响事物的发展，说明事物的发展具有复杂性。

我们可以用一个很简单的机械实验来阐释这个观点。如右图所示，如果你将一颗滚珠从箱子上方的开口处落下，滚珠在下落的过程中由于碰到不同的别针，会向左边或右边偏移，直到最终落在箱体底部的整理槽中。然后，你可以将另一颗完全一样的滚珠，从相同的位置以相同的速度落下。如果你可以完全精确地做到这些，那么拉普拉斯将是对的，滚珠下落的路径将是完全一样的。如果第 1 个滚珠落在左数第 3 个槽中，



经典弹球实验

那么第 2 个滚珠也会落在这个槽中。

但是，你终究无法保证滚珠下落时的位置、速度以及作用力完全相同。在现实中，必然存在一些误差，这些误差甚至轻微到你自己都无法测量。因此，滚珠下落的路径可能会截然不同，最终落到另一个槽中。

我们可以继续放滚珠，你放完 100 个滚珠后，如果滚珠在整理槽中的分布呈中间多、两边少的分布（这可能是别针的分布与间隔原因造成的）。那么，换第二个人来放 100 个滚珠，最终滚珠在整理槽中的分布仍然会呈中间多、两边少的现象。换第三个人来放 100 个滚珠，滚珠在整理槽中的分布仍然会如此。这就是混沌现象。

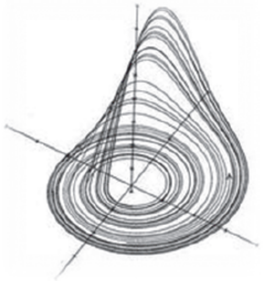
“混沌”（Chaos），这种现象表面上看是随机的，不可预报的，而事实上却是按照严格的且经常是易于表述的规则运动着。混沌的基本性质——**非线性、复杂性和分维性**。

后人把洛伦兹那个失真的简化系统称为洛伦兹模型“怪物”，事实上它只是一个三维非线性常微分方程组（见下式）。当参数无限靠近某些数时，绘出的动态图形便形成了一种被称为奇异吸引子的东西！

$$\dot{x} = -\sigma\,(x-y)$$

$$\dot{y} = rx - y - xz$$

$$\dot{z} = -bz + xy$$



1964 年，法国尼斯城的一位天文学家埃农，用袖珍计算器对一类简单的平面坐标变换进行迭代。他算了七百多次迭代，找到了一个周期为 7 的周期点。埃农发现，一旦出现了周期 7 的周期点，进一步的迭代立刻出现了混乱现象，情形与洛伦茨奇异吸引子十分相似。

奇异吸引子是一种运动状态，它有一种内在随机性，表现出非常强的稳定性和敏感性，而且还具有分形图那样的自相似性。

继洛伦兹、埃农之后，人们又在天文学、生态学、热力学、经济学和社会

学等学科内遇到大量外表现状简单、行为却极为复杂的系统，都具有这些怪异性，这就是混沌理论的由来。

混沌理论所研究的是非线性动力学混沌，目的是要揭示貌似随机的现象背后可能隐藏的简单规律，以求发现一大类复杂问题普遍遵循的共同规律。我们看到的不再是“混乱的”混沌，而是“有秩序的”混沌。

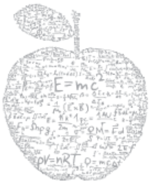
目前，混沌理论已广泛应用于社会、经济、教育、传播等领域。

传播学是一门历史不足百年的新兴社会学科，它的许多传统理论模式沿袭了 17 世纪牛顿式的还原论思维和传统生物学的解剖式处理方式，既将社会信息从社会整体系统割裂开来进行分析，把传播问题线性化和机械化。网络系统和整个人类社会系统，都属于开放性的复杂系统，混沌和秩序协同共生是其根本特征。

经典的传播学理论（如把关人、议程设置等理论）已难以解释现代传播现象。一条微博可能是带来飓风的“蝴蝶翅膀”，也可能是“压死骆驼的稻草”，从而引发集体关注或成为群体性事件。

不仅在研究领域，在我们日常生活中，也处处体现着混沌思想。比如，我们经常说的“失之毫厘、差之千里”“物极必反”等。美国人约翰·布理格斯和英国人 F. 戴维·皮特所著的《混沌七鉴》一书，阐释了混沌的七个隐喻：①创造；②运用蝴蝶力量；③行云流水；④上下求索；⑤观世术；⑥在时间内生活；⑦回归整体。

“一沙见世界、须臾纳永恒”体现世界是“确定性的”还是“混沌的”？



思考题参考答案

扫描此码 获取答案

参考文献

[1] [英]Tony Crilly. 你不可不知的 50 个数学知识 [M]. 王悦，译 . 北京：人民邮电出版社，2010.

[2] [日] 中岛幸子 . 数学与音乐的创造力　捕捉未知与无形 [M]. 黄晶晶，译 . 北京：人民邮电出版社，2015.

[3] [日] 远山启 . 数学与生活 [M]. 吕砚山等，译 . 北京：人民邮电出版社，2014.

[4] [美]Alexander J. Hahn. 建筑中的数学之旅 [M]. 李莉，译 . 北京：人民邮电出版社，2014.

[5] [美] 邦尼·埃弗巴克，奥林 • 钱恩 . 趣味学数学 [M]. 吴元泽，译 . 北京：人民邮电出版社，2016.

[6] [英]Ian Stewart. 数学万花筒 [M]. 张云，译 . 北京：人民邮电出版社，2012.

[7] [美] 比特伦 • 阿塔拉伊 . 达 • 芬奇的数字迷宫 [M]. 牛小婧等，译 . 北京：中信出版社，2007.

[8] [美] 齐斯·德福林 . 数学的语言　化无形为可见 [M]. 洪万生等，译 . 桂林：广西师范大学出版社，2013.

[9] [美] 洛伦兹 . 混沌的本质 [M]. 刘式达等，译 . 北京：气象出版社，1997.

[10] [美] 约翰 • 布里格斯，[英]F. 戴维 • 皮特 . 混沌七鉴：来自易学的永恒

智慧 [M]. 陈忠，金纬，译 . 上海：上海科技教育出版社，2008.
[11] 盛立人，等 . 社会科学中的数学 [M]. 北京：科学出版社，2007.
[12] 易南轩 . 当数学遇上诗歌 [M]. 北京：科学出版社，2017.
[13] 张奠宙，丁传松，柴俊，等 . 情真意切话数学 [M]. 北京：科学出版社，2011.
[14] 王树和 . 数学志异 [M]. 北京：科学出版社，2015.
[15] 徐品方，徐伟 . 数字奇趣 [M]. 北京：科学出版社，2012.
[16] 张顺燕 . 数学 • 科学与艺术 [M]. 北京：北京大学出版社，2014.
[17] 吴振奎 . 美妙的数学 [M]. 北京：北京大学出版社，2014.
[18] 张宏时 . 数学如诗 [M]. 苏州：苏州大学出版社，2015.